Präsentationsprüfung

LI HAMBURG

Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung | Beispielaufgaben für die Präsentationsprüfung |

Mathematik

Hamburg

Inhaltsverzeichnis

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

mit den hier vorgelegten Beispielaufgaben möchten wir Sie bei der Gestaltung der neuartigen Präsentationsprüfung im Abitur unterstützen. Die Aufgaben sind entwickelt worden mit dem Ziel, Ihnen hilfreiche und nachvollziehbare Hinweise für eigene Überlegungen zu Abituraufgaben zu geben.

Grundsätzlich besteht ein wesentliches Merkmal „guter“ Prüfungsaufgaben darin, dass sie sinnvoll aus dem vorausgegangenen Unterricht abgeleitet werden und dadurch den Schülerinnen und Schülern ermöglichen, die erworbenen Kompetenzen umfassend zu demonstrieren. Insofern sind unsere Beispielaufgaben mit Vorbehalt zu betrachten, da sie die unterrichtlichen Voraussetzungen nur in allgemeiner Weise – also bezogen auf den jeweiligen Rahmenplan und die Abiturrichtlinie – aufgreifen können.

Wenn Sie die Beispiele in Ihren Fächern, aber auch mit den Beispielen aus anderen Fächern vergleichen, werden Sie eine gewisse Varianz feststellen – manche Beispiele sind knapper gehalten, andere ausführlich, einige verwenden Operatoren, andere verzichten darauf usw. Diese Unterschiedlichkeit ist gewollt; sie soll die Bandbreite aufzeigen, in der sich mögliche Aufgabenstellungen für die Präsentationsprüfung bewegen können, und Sie damit anregen und ermutigen, diese Bandbreite auch zugunsten Ihrer Schülerinnen und Schüler zu nutzen.

Aber es gibt auch Gemeinsamkeiten: Die Beispiele sind grundsätzlich **problemorientiert** gestaltet, und sie lassen damit den Schülerinnen und Schülern **Freiräume** bei der Bearbeitung und der thematischen Schwerpunktsetzung. Außerdem sind alle Beispiele selbstverständlich so gestaltet, dass sie eine **Bearbeitung auf allen drei Anforderungsebenen** ermöglichen. Und schließlich halten sich die Beispielaufgaben selbstverständlich eng an die **fachlichen Vorgaben des jeweiligen Rahmenplans und der Abiturrichtlinie**.

Ich hoffe, dass wir Ihnen mit diesen Beispielen eine Hilfe an die Hand geben können, mit der Sie die neuen Anforderungen besser bewältigen können. Über Anregungen und Kritik unter jochen.schnack@li-hamburg.de freue ich mich!

Dr. Jochen Schnack

Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung

Zweidimensionalen Darstellung dreidimensionaler Objekte

I Thema im unterrichtlichen Zusammenhang

Für das Fach Mathematik macht der Rahmenplan der Gymnasialen Oberstufe folgende Festlegungen: die Inhalte sind in sechs Modulen gegliedert, von denen 4 Module innerhalb der ersten drei Semester verbindlich sind. Im letzten Halbjahr gibt es die Möglichkeit diejenigen Module zu behandel, die in den ersten drei Halbjahren nicht behandelt wurden.

Es gibt also folgende Möglichkeiten:

Module 1,2,4,5 (mehr Stochastik: Module 2 und 5), oder

Module 1,3,4,6 (mehr Geometrie und Modelle mit Matrizen)

Analysis

(i) Modul 1: *Von der Änderungsrate zum Bestand*

(ii) Modul 4: *Änderungsraten und Bestände*.

Ausprägung Stochastik

(iii) Modul 2: *Der Zufall steht Modell*

(iv) Modul 5: *Anwendungsprobleme der Stochastik.*

Hierbei wird die Stochastik weiter gefestigt und zum Modeliieren eingesetzt.

Modelle mit Matrizen, analytische Geom.

(v) Modul 3: *Matrizen und Vektoren als Datenspeicher*

(vi) Modul 6: *Analytische Geometrie*

Ausprägung analytische Geometrie und lineare Algebra.

II Eingrenzung des Prüfungsgebiets

Die Schülerin / der Schüler schlägt als Thema für ihre / seine Präsentationsprüfung „Anwendungsprobleme der analytischen Geometrie“ vor. Lehrerin / Lehrer und Schülerin / Schüler einigen sich auf das Gebiet der analytisch-geometrischen Methoden der Computersimulation, wobei bekannte Einzelaspekte im Anwendungskontext neu kombiniert werden sollen. Dabei sollen auch Anteile der Matrizenrechnung einfließen.

Auf erhöhtem Niveau erwartet man insbesondere eine selbstständigere Auswahl von illustrierenden Beispielen, präzisere Darstellungen sowie verallgemeinernde Gedankengänge.

III Aufgaben

a) Erläutern Sie die Problematik der zweidimensionalen Darstellung dreidimensionaler Objekte.

b) grundlegendes Niveau: Gegeben ist eine Pyramide durch ihre Eckpunkte A(12|8|11), B(10|10|13), C(8|8|13), D(10|6|11) und S(9|9|10). Diese Pyramide wird von jeweils zu den Koordinatenebenen orthogonalen Lichtstrahlen beschienen. Erzeugen Sie – soweit vorhanden – die dazugehörigen Schattenbilder auf den drei Koordinatenebenen.
Untersuchen Sie, wie man jeden dieser Projektionsvorgänge auch durch eine Multiplikation mit je einer Matrix beschreiben kann.

c) erhöhtes Niveau: Ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ wird von einem durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T$ beschriebenen Lichtstrahl beschienen.
Ermitteln Sie – soweit vorhanden – die Koordinaten der Schattenpunkte auf den drei Koordinatenebenen.
Untersuchen Sie, wie man jeden dieser Projektionsvorgänge auch durch eine Multiplikation mit je einer Matrix beschreiben kann.

d) grundlegendes Niveau: Untersuchen Sie am Beispiel der oben genannten Pyramide und einem Lichtstrahlvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T$ die an den Pyramidenflächen entstehenden Helligkeitsunterschiede. Gehen Sie bei Ihrer Untersuchung in Anlehnung an das Lambertsche Kosinusgesetz davon aus, dass die Helligkeit diffus reflektierter Strahlung proportional zum Kosinus des Winkels zwischen Lichtstrahl und Flächennormale ist.

erhöhtes Niveau: Untersuchen Sie an einem selbst gewählten einfachen Beispiel das Phänomen der Helligkeitsunterschiede an einem durch eine Lichtquelle beschienenen Körper.
Gehen Sie bei Ihrer Untersuchung in Anlehnung an das Lambertsche Kosinusgesetz davon aus, dass die Helligkeit diffus reflektierter Strahlung proportional zum Kosinus des Winkels zwischen Lichtstrahl und Flächennormale ist.

IV Erwartungshorizont

Dieser Erwartungshorizont bezieht sich auf die Aufgabenstellung, nicht auf die vom Prüfling zu erarbeitende und in der Dokumentation darzustellende Konkretisierung. Der vom Prüfer in der echten Prüfungssituation zu erstellende Erwartungshorizont hingegen muss sich auf die Dokumentation beziehen.

a)

- Dreidimensionale Objekte können nur unter Informationsverlust zweidimensional dargestellt werden. Der räumliche Eindruck wird dadurch vermindert. **(AFB I)**
- Zur teilweisen Kompensation dieser Minderung gibt es verschiedene Möglichkeiten: etwa Schrägbilder, Schattenwürfe sowie Helligkeitsunterschiede bei Beleuchtung. **(AFB I)**
- Methoden der analytischen Geometrie ermöglichen es, die genannten Möglichkeiten rechnerisch, also computergerecht, zu realisieren. **(AFB II)**

b)

grundlegendes Niveau

- Bei der orthogonalen Projektion auf die jeweilige Koordinatenebene erhält jeweils eine Koordinate den Wert Null, während die anderen konstant bleiben. **(AFB I)**
- Die so entstehenden Projektionspunkte werden gezeichnet und zu drei Schattenbildern zusammengeführt. **(AFB I)**
- Die Überführung einzelner Koordinaten auf den Wert Null unter Beibehaltung der anderen kann auch durch Multiplikationen mit Matrizen durchgeführt werden; diese ähneln den Einheitsmatrizen, wobei aber jeweils ein Diagonalenelement den Wert Null hat. **(AFB II)**

erhöhtes Niveau

- Die Projektionen werden als Schnittpunktsberechnungen der durch P und $\vec{v}$ gegebenen Gerade mit den jeweiligen Koordinatenebenen aufgefasst. **(AFB II)**
- Bei der Projektion auf die jeweilige Koordinatenebene erhält je eine Koordinate den Wert Null. Dieser Ansatz führt zur Bestimmung des jeweiligen Wertes des Parameters, sodass damit die jeweils beiden weiteren Koordinaten ermittelt werden können. **(AFB III)**
- Diese Schnittpunktsbestimmung kann auch abgekürzt durch Multiplikationen mit Matrizen durchgeführt werden. Zur Ermittlung des Bildpunktes auf der x_1-x_3-Ebene hat die Matrix die folgende Gestalt: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{v_1}{v_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v_3}{v_2} & 1 \end{pmatrix}$.

  Analoges gilt für die verbleibenden Projektionen. **(AFB III)** c)

grundlegendes Niveau

- Das Lambertsche Kosinusgesetz wird dargestellt und erläutert. **(AFB II)**
- Anhand der vorgegebenen Pyramide und des ebenfalls vorgegebenen Lichtvektors werden mittels Normalenvektoren Helligkeiten errechnet und graphisch dargestellt. **(AFB III)**

erhöhtes Niveau

- Das Lambertsche Kosinusgesetz wird dargestellt und erläutert. **(AFB II)**
- Anhand eines selbst gewählten Beispiels werden mittels Normalenvektoren Helligkeiten errechnet und graphisch dargestellt. **(AFB II)**

V Bewertungskriterien für "gut" und "ausreichend"

Eine gute Leistung ist erbracht, wenn die Schülerinnen und Schüler

grundlegendes Niveau

- die Problematik der zweidimensionalen Darstellung dreidimensionaler Objekte anschaulich vorstellen und auch den Bezug zwischen Geometrischem und Numerischem herstellen,
- die Grundidee der orthogonalen Projektion erklären sowie die Beispielprojektionen rechnerisch und zeichnerisch sauber durchführen,
- den Zusammenhang zur Matrizenmultiplikation unter Angabe und Erläuterung der Matrizen gut begründet herstellen,
- das Lambertsche Kosinusgesetz darstellen,
- das Lambertsche Kosinusgesetz ohne größere Fehler auf das vorgegebene Beispiel anwenden und die Ergebnisse graphisch darstellen,
- im Fachgespräch auf Fragen auch über das Vorgetragene hinaus, jedoch zum Thema der Präsentation Gehörende eingehen.

erhöhtes Niveau

- die Problematik der zweidimensionalen Darstellung dreidimensionaler Objekte aspektreich vorstellen und auch den Bezug zwischen Geometrischem und Numerischem herstellen,
- die Grundidee der schrägen Projektion als Schnittpunktsberechnung präzise darstellen und mithilfe der gegebenen Variablen durchführen,
- den Zusammenhang zur Matrizenmultiplikation unter Herleitung der Matrizen begründet herstellen,
- das Lambertsche Kosinusgesetz darstellen und erläutern,
- das Lambertsche Kosinusgesetz ohne größere Fehler auf ein selbstgewähltes passendes Beispiel anwenden und die Ergebnisse graphisch darstellen,
- im Fachgespräch auf Fragen auch über das Vorgetragene hinaus, jedoch im weiteren Sinne zum Thema der Präsentation Gehörende eingehen.

Eine ausreichende Leistung ist erbracht, wenn die Schülerinnen und Schüler

grundlegendes Niveau

- die Problematik der zweidimensionalen Darstellung dreidimensionaler Objekte vorstellen,
- die Beispielprojektionen rechnerisch und zeichnerisch durchführen,
- das Lambertsche Kosinusgesetz darstellen,
- im Fachgespräch auf einfache Fragen zum Vorgetragenen korrekt antworten.

erhöhtes Niveau

- die Problematik der zweidimensionalen Darstellung dreidimensionaler Objekte vorstellen,
- die Grundidee der schrägen Projektion als Schnittpunktsberechnung darstellen und mithilfe der gegebenen Variablen ohne größere Fehler durchführen,
- das Lambertsche Kosinusgesetz darstellen und erläutern,
- das Lambertsche Kosinusgesetz ohne größere Fehler auf ein selbstgewähltes passendes Beispiel anwenden,
- im Fachgespräch auf Fragen auch über das Vorgetragene hinaus, jedoch zum Thema der Präsentation Gehörende eingehen.

Kostenkurve

Mathematik AN 1 (grundlegendes und erhöhtest Niveau)

I Thema im unterrichtlichen Zusammenhang

Der Bildungsplan gymnasiale Oberstufe sieht in Mathematik für beide Niveaustufen in der Studienstufe zwei Module im Bereich Analysis vor. Der Schwerpunkt des vorliegenden Themas liegt im Modellieren in ökonomischen Sachkontexten und ist sowohl Inhalt von Modul1 „Von der Änderungsrate zum Bestand“ als auch von Modul 4 „Änderungsraten und Bestände“. Bereichsübergreifend wird im Rahmen der Aufgabenstellung das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit dem Gauß’schen Eliminationsverfahren verlangt, das Gegenstand von Modul 3 „Matrizen und Vektoren als Datenspeicher“ und damit dem Bereich Lineare Algebra zuzuordnen ist.

II Eingrenzung des Prüfungsgebietes

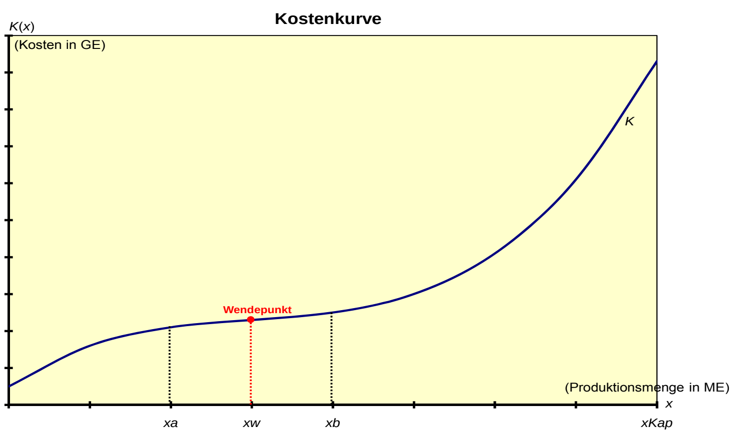
Die Schülerin / der Schüler schlägt als Thema für seine Präsentationsprüfung das Modell des „s-förmigen Kostenverlaufs“ vor. Lehrerin / Lehrer und Schülerin / Schüler einigen sich darauf, die Aufgabe so zu verstehen, dass die bei der Modellierung verwendeten mathematischen Grundlagen und Methoden präzise dargestellt und deren Anwendung stets im ökonomischen Sachkontext begründet wird.

Für das erhöhte Niveau soll die Aufgabe um eine Problematisierung der Verwendung der ersten Ableitung als Grenzkostenfunktion erweitert werden.

Eine dem Thema angemessene Präsentationsform wird erwartet, aber nicht vorgegeben.

III Aufgabenstellung

In den Wirtschaftswissenschaften verwendet man mathematische Methoden, um einerseits in konkreten Situationen optimale Entscheidungen treffen und andererseits ökonomische Zusammenhänge besser erklären zu können. Damit sich diese Methoden anwenden lassen, ist es in der Regel notwendig, Vereinfachungen der Realität vorzunehmen. Die folgende Grafik zeigt ein typisches Beispiel einer in der Kostentheorie für ein bestimmtes Produkt in einem bestimmten Betrieb verwendeten Kostenkurve, deren Verlauf auch als „s-förmig“ bezeichnet wird. Die zugehörige Funktion wird als Kostenfunktion K bezeichnet.



- Beschreiben Sie den Verlauf der dargestellten Kostenkurve *K* und interpretieren Sie ihn im ökonomischen Sachkontext.
- Bestätigen Sie, dass sich die Kostenkurve durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades der Form $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hinreichend beschreiben lässt, und ermitteln Sie mit Hilfe des „Gaußschen Eliminationsverfahrens" unter Verwendung der Matrizenschreibweise die zugehörige Kostenfunktion K, wenn von der Kostenkurve folgende Angaben bekannt sind:
  $x_a = 2 \wedge K(x_a) = 26$, $x_w = 3 \wedge K(x_w) = 28$ und $x_{Kap} = 4 \wedge K(x_{Kap}) = 98$.
- Untersuchen Sie, welche Werte die jeweiligen Koeffizienten *a*, *b*, *c* und *d* einer Kostenfunktion K zur Darstellung einer typischen s-förmigen Kostenkurve nur annehmen dürfen.
- *Problematisieren Sie die Verwendung der ersten Ableitung K' als Grenzkostenfunktion.*

IV Beispieldokumentation

A) Die Präsentation gliedert sich wie folgt:

1. Einleitung

   Die Entstehung und Zusammensetzung der Gesamtkosten werden kurz erläutert und auf die Bedeutung eines sinnvollen ökonomischen Definitionsbereiches wird hingewiesen.

2. Beschreibung des Verlaufs der Kostenkurve und Interpretationen im ökonomischen Sachkontext

   Die Kostenkurve stellt eine rechts-/linksgekrümmte Kurve dar, die monoton wächst. Ökonomisch kann der hier vorliegende Verlauf aus dem aus der Landwirtschaft bekannten Ertragsgesetz abgeleitet werden. Die zugehörige Kostenfunktion wird deshalb auch als ertragsgesetzliche bzw. s-förmige Kostenfunktion bezeichnet.

3. Bestätigung, dass sich die Kostenkurve durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades hinreichend beschreiben lässt, und Ermittlung der Kostenfunktion unter Verwendung des „Gaußschen Eliminationsverfahrens"

   Aus den typischen Verlaufsmerkmalen der Graphen von ganzrationalen wird hergeleitet, dass sich die Kostenkurve hinreichend durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschreiben lässt. Durch Einsetzen der Angaben zur Kostenkurve in die allgemeine Form der Kostenfunktion wird ein Gleichungssystem aufgestellt, dass mit Hilfe des „Gaußschen Eliminationsverfahrens" gelöst werden kann.

4. Bestimmung der Wertemenge für die einzelnen Koeffizienten der Kostenfunktion

   Aus den charakteristischen Merkmalen wie Krümmungsverhalten, Wendepunkt und dem Nichtvorhandensein von Extrempunkten werden algebraisch aus den entsprechenden Bedingunsgleichungen bzw. –ungleichungen Rückschlüsse auf die Wertemenge für die einzelnen Koeffizienten gezogen.

5. Problematisierung der Verwendung von K' als Grenzkostenfunktion
   [*Nur erhöhtes Niveau!*]

   Die ökonomische Definition der Grenzkosten stellt im mathematischen Sinne die Grenzkosten als Sekantensteigungen dar, die Verwendung von K' führt aber zur Gleichsetzung der Grenzkosten mit Tangentensteigungen, die wiederum nur bei linearen Funktionen identisch sind.

B) Die folgenden Quellen wurden verwendet:

Literatur

- HEINZ GRIESEL/HELMUT POSTEL, Hrsg.; (1988): Mathematik heute – Einführung in die Analysis 1. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag
- KLAUS SCHILLING (2007): Analysis – Einführungs- und Qualifikationsphase. Troisdorf: Bildungsverlag EINS
- ROLF SCHÖWE/JOST KNAPP u.a. (2010): Mathematik (Wirtschaft) – Allgemeine Hochschulreife (Erweiterte Ausgabe). Berlin: Cornelsen Verlag
- BLANK, HAGEL, HAHN, MEYER, MÜLLER, PADE (2006): BWL mit Rechnungswesen für berufliche Gymnasien (Band 1). Troisdorf: Bildungsverlag EINS

Internet

http://de.wikipedia.org/wiki/Grenzkosten

http://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fsches_Eliminationsverfahren

C) Folgende Medien werden eingesetzt:

PowerPoint-Bildschirmpräsentation, die teilweise in Schritten aufgedeckt und durch angemessene Animationen ergänzt wird.

V Erwartungshorizont

Dieser Erwartungshorizont bezieht sich auf die Aufgabenstellung und auf eine Beispieldokumentation für die vom Prüfling zu erarbeitende und in dieser Dokumentation darzustellende Konkretisierung.
Der vom Prüfer zu erstellende Erwartungshorizont muss sich auf die Dokumentation des Prüflings beziehen!

1. Einleitung

Die Kostenkurve stellt graphisch die bei unterschiedlichen Produktionsmengen anfallenden Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE) dar. Die Gesamtkosten eines bestimmten Produktes in einem bestimmten Betrieb ergeben sich aus den von der Produktionsmenge in ME – auch Ausbringungsmenge genannt – abhängigen **variablen Kosten** (z. B. Löhne, Fertigungsmaterial, Energie) und den von der Produktionsmenge unabhängigen **fixen Kosten** (z. B. Mieten, Abschreibungen, Versicherungsbeiträge).

Da ein Betrieb nur positive Mengeneinheiten (ME) bis maximal zu seiner **Kapazitätsgrenze** (x_{Kap}) herstellen kann, ist ein sinnvoller ökonomischer Definitionsbereich für die Kostenfunktion K anzugeben: $D_{ök}(K) = \left[0; x_{Kap}\right]$.

Anforderungsbereich I

2. Beschreibung des Verlaufs der Kostenkurve und Interpretation im ökonomischen Sachkontext

Bei einer Produktion von 0 ME (Produktionsstillstand) entstehen fixe Kosten in Höhe des *y*-Achsenabschnittes. Mit Aufnahme und Erhöhung der Produktion bis zur Kapazitätsgrenze fallen ständig steigende variable Kosten an. Die Kostenkurve ist also monoton wachsend.

Der Kostenzuwachs ist bei jeder Produktionsmenge unterschiedlich. Anfänglich steigen die Kosten in einer rechtsgekrümmten Kurve bis zum Wendepunkt degressiv, d. h. mit jeder zusätzlich produzierten ME nimmt der Kostenzuwachs ab. Im Wendepunkt ist der Kostenzuwachs am niedrigsten. Zwischen dem Wendepunkt und der Kapazitätsgrenze steigen die Kosten in einer linksgekrümmten Kurve progressiv, d. h. mit jeder zusätzlich produzierten ME nimmt der Kostenzuwachs immer stärker zu.

Die unterschiedlichen Kostenzuwächse, die in der Kostentheorie als **Grenzkosten** bezeichnet werden, lassen sich im relevanten Definitionsbereich wie folgt interpretieren:

Bei geringen Produktionsmengen im Bereich $\left[0;x_w\right]$ steigen die Kosten bei einer Erhöhung der Produktionsmenge bedingt durch effizienteren Ressourceneinsatz (z. B. Arbeitskräfte und Maschinen) nur **degressiv**. Wird die Produktionsmenge über die Wendestelle hinaus ausgeweitet, bewegt sie sich also im Bereich $\left]x_w;x_{Kap}\right]$, so steigen die Kosten durch erhöhten Energieverbrauch, zusätzlichen Maschinenverschleiß, Überstundenzuschläge u. a. **progressiv**.

Hieraus ergibt sich zwingend, dass die Kostenkurve weder ein lokales Minimum noch Maximum aufweisen kann.

Anforderungsbereich II

3. Bestätigung, dass sich die Kostenkurve durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades hinreichend beschreiben lässt, und Ermittlung der Kostenfunktion mit Hilfe des „Gaußschen Elimintaionsverfahrens“

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist gekennzeichnet durch einen Wendepunkt, in dem der Graph von einer Rechts- in eine Linkskurve – oder auch umgekehrt – übergeht. Das Krümmungsverhalten ist dabei abhängig vom in der Funktionsgleichung *K* angegebenen Koeffizienten *a*. Für $a>0$ ist die Kurve rechts-/linksgekrümmt, für $a<0$ umgekehrt. Zusätzlich kann der Graph entweder paarweise einen lokalen Hoch- und Tiefpunkt aufweisen oder keinen von beiden. Diese typischen Kennzeichnen spiegeln sich im Verlauf der Kostenkurve in besonderer Weise wider, so dass eine ganzrationale Funktion 3. Grades hinreichend zu deren Beschreibung geeignet ist.

Aus den Angaben zur Kostenkurve lassen sich durch Einsetzen der entsprechenden Werte in die gegebene allgemeine Form von *K* die folgenden Bedingungsgleichungen herleiten:

$$\begin{array}{lrrrrcr}
K(2)=26: & 8a & +4b & +2c & +d & = & 26 \\
K(3)=28: & 27a & +9b & +3c & +d & = & 28 \\
K''(3)=0: & 18a & 2b & & & = & 0 \\
K(8)=98: & 512a & +64b & +8c & +d & = & 98
\end{array}$$

Das entstandene Gleichungssystem bzw. die sich daraus ergebende Systemmatrix bzw. erweiterte Koeffizientenmatrix lässt sich mit dem „Gaußschen Eliminationsverfahren“ eindeutig lösen.

Dabei sind die folgenden elementaren Matrizenumformungen zulässig:

- Vertauschen zweier Zeilen der Matrix,
- Multiplizieren einer Zeile der Matrix mit einem Faktor ungleich 0,
- Addieren des Vielfachen einer Zeile der Matrix zu einer anderen Zeile der Matrix.

Lässt sich die Koeffizientenmatrix in eine Einheitsmatrix umformen, so wird der Konstantenvektor der Systemmatrix in den Lösungsvektor des Systems überführt.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 28 \\ 18 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 512 & 64 & 8 & 1 & 98 \end{array}\right] \qquad \left|\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 27 & 9 & 64 \\ & -8 & & \\ & & -4 & \\ & & & -1 \end{array}\right|$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 0 & 36 & 30 & 19 & 478 \\ 0 & 28 & 18 & 9 & 234 \\ 0 & 192 & 120 & 63 & 1566 \end{array}\right] \qquad \left|\begin{array}{c|c|c|c} 1 & & & \\ & 1 & 7 & 16 \\ & & -9 & \\ & & & -3 \end{array}\right|$$

.

.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 0 & 36 & 30 & 19 & 478 \\ 0 & 0 & 48 & 52 & 1240 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 300 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 0 & 36 & 30 & 19 & 478 \\ 0 & 0 & 12 & 13 & 310 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \qquad \left|\begin{array}{c|c|c|c} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & -13 & -19 & -1 \end{array}\right|$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 36 & 30 & 0 & 288 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \qquad \left|\begin{array}{c|c|c|c} & & 5 & 1 \\ & & & \\ & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & & \end{array}\right|$$

.

.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Durch Einsetzen der Lösungswerte für die Koeffizienten in die allgemeine Form der Kostenfunktion ergibt sich die Gleichung der Kostenfunktion *K*.
Die gesuchte Kostenfunktion lautet also: $K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 15x + 10$.

Anforderungsbereich II

4. Bestimmung der Wertemenge für die einzelnen Koeffizienten der Kostenfunktion

Für die Koeffizienten der Kostenfunktion ergibt sich unter Berücksichtigung der vorherigen Ausführungen:

<u>Koeffizient *a*:</u>

$a > 0$, weil die Kostenkurve eine Rechts- / Linkskrümmung aufweist

<u>Koeffizient *b*:</u>

$b < 0$, weil ein Wendepunkt in Bereich $]0; x_{Kap}[$ existiert und damit die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

Aus $-\frac{b}{3a} > 0 \wedge a > 0$ folgt: $b < 0$

<u>Koeffizient *c*:</u>

$c > 0$, weil die Kostenkurve keinen Extrempunkt besitzt und damit folgende Bedingung <u>nicht</u> erfüllt sein darf:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - \frac{c}{3a}}$$

Aus der Diskriminante und der Vorgabe $a > 0$ ergibt sich:

$$c > 0 \wedge c < \frac{b^2}{3a}$$

<u>Sonderfall [Nur für erhöhtes Niveau!]:</u>

Sollte $c = \frac{b^2}{3a}$ sein, so hat die Steigung in der Wendestelle $x = -\frac{b}{3a}$ den Wert 0 (Sattelpunkt). Ein Kostenzuwachs von Null ist aber aus ökonomischer nicht sinnvoll, da bei der Erhöhung der Produktionsmenge mindestens Materialkosten anfallen.

<u>Koeffizient *d*:</u>

$d > 0$, weil *d* der *y*-Achsenabschnitt und damit gleich den fixen Kosten ist

Anforderungsbereich III für grundlegendes N., Anforderungsbereich II und III für erhöhtes N.

5. Problematisierung der Verwendung von K' als Grenzkostenfunktion [*Nur erhöhtes Niveau!*]

Nach der ökonomischen Definition sind Grenzkosten der Kostenzuwachs, der durch die Mehrproduktion einer Ausbringungseinheit entsteht, also eine Sekantensteigung als Kostenzuwachs zwischen zwei Punkten. Die Ableitungsfunktion K' ordnet jedem Punkt der Kostenkurve die in diesem Punkt existierende Tangentensteigung zu, also im eigentlichen Sinne den Kostenzuwachs für eine bestimmte Ausbringungsmenge.

Dieser Widerspruch wird in der Kostentheorie dadurch gelöst, dass man von beliebig kleinen Produktionseinheiten ausgeht. Aus der Annahme, dass zwei Produktionsmengen x_1 und x_2 nur marginal zu unterscheiden sind, also $x_2 = x_1 + h$ mit $h \to 0$ gilt, lässt sich mathematisch zeigen, dass aus dem Differenzenquotienten (Sekantensteigung) in der Grenzwertbetrachtung ein Differenzialquotient (Tangentensteigung) wird.

Letztendlich ist diese Annahme von beliebig kleinen Produktionseinheiten auch zwingend erforderlich, um den typischen Verlauf einer ertragsgesetzlichen Kostenkurve, der als Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades im ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich angesehen wird und der damit dort stetig und differenzierbar sein muss, mathematisch zu rechtfertigen.

Anforderungsbereich III für erhöhtes Niveau

VI Mögliche Fragen für den zweiten Prüfungsteil

Neben Fragen, die das Verständnis und die Selbstständigkeit der Lösung der Aufgabenstellung überprüfen (z. B. Nachfragen zu ökonomischen Sachkontexten und zu Rechenschritten), kann man im anschließenden Gespräch auch weiterführende Fragen, insbesondere zum semesterübergreifenden Themenbereich stellen:

1. Was versteht man im Rahmen der Matrizenumformung unter den Begriffen Pivotzeile, Pivotspalte und Pivotelement?

2. Bei Fragestellungen zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme werden als Entscheidungskriterien u. a. der Rang der Koeffizientenmatrix und der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix (Systemmatrix) genannt. Was heißt Rang einer Matrix *A* und welche Schlussfolgerungen kann man aus den Rängen der Koeffizientenmatrix und der Systemmatrix für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems ziehen?

3. In der Kostentheorie werden zwar nach wie vor s-förmige Kostenverläufe unterstellt, aber zunehmend Modellierungen mit linearen Kostenverläufen vorgenommen. Welche Rahmenbedingungen müssen gegeben sein, damit sich diese weitere Vereinfachung der Realität als Unter- bzw. Teilmodell des hier präsentierten Modells eines s-förmigen Kostenverlaufs darstellen lässt?

VII Bewertungskriterien für „gut“ und „ausreichend“

Eine gute Leistung ist erbracht, wenn

- die Schülerinnen und Schüler den Begriff „Kostenkurve“ angemessen und präzise erläutern,
- sie den unterschiedlichen Kurvenverlauf verdeutlichen, im ökonomischen Sachkontext interpretieren und begründen,
- sie in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Darlegung von Lösungswegen und der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen,
- sie eine dem Thema angemessene Präsentationsform wählen, das Thema in freier Rede darstellen und sich sprachlich korrekt ausdrücken,
- sie im Fachgespräch die gewählte Präsentationsform, die Inhalte der Präsentation fachlich korrekt und reflektiert vorstellen.

Zusätzlich für das erhöhte Niveau:

- sie die Problematik der Verwendung der Grenzkostenfunktion aus ökonomischer und mathematischer Sich erläutern und
- zu einer Lösung des Problems gelangen.

Eine ausreichende Leistung ist erbracht, wenn

- die Schülerinnen und Schüler den Begriff „Kostenkurve“ eigenständig und im Ansatz erläutern,
- sie den unterschiedlichen Kurvenverlauf benennen und im Ansatz aus dem ökonomischen Sachkontext begründen,
- sie die erforderlichen Rechnungen im Anforderungsbereich II vollständig und weitgehend richtig durchführen
- sie eine geeignete Präsentationsform wählen und in der Lage sind, ein themengebundenes Gespräch zu führen.

Zusätzlich für das erhöhte Niveau:

- sie in ihrer Darstellung die Problematik der Sekanten- und Tangentensteigung erkennen,
- im Ansatz zu einer Idee zur Lösung des Problems gelangen.

Bevölkerungsentwicklung in Deutschland

I Thema im unterrichtlichen Zusammenhang

Für das Fach Mathematik macht der Rahmenplan der Gymnasialen Oberstufe folgende Festlegungen: die Inhalte sind in sechs Modulen gegliedert, von denen 4 Module innerhalb der ersten viel Semester verbindlich sind. Im letzten Halbjahr gibt es die Möglichkeit diejenigen Module zu behandeln, die in den ersten drei Halbjahren nicht behandelt wurden.

Es gibt also folgende Möglichkeiten:

Module 1,2,4,5 (mehr Stochastik: Module 2 und 5), oder

Module 1,3,4,6 (mehr Geometrie und Modelle mit Matrizen)

<u>Analysis</u>

(i) Modul 1: *Von der Änderungsrate zum Bestand*

(ii) Modul 4: *Änderungsraten und Bestände*.

<u>Ausprägung Stochastik</u>

(iii) Modul 2: *Der Zufall steht Modell*

(iv) Modul 5: *Anwendungsprobleme der Stochastik.*

Hierbei wird die Stochastik weiter gefestigt und zum Modeliieren eingesetzt.

<u>Modelle mit Matrizen, analytische Geom.</u>

(v) Modul 3: *Matrizen und Vektoren als Datenspeicher*

(vi) Modul 6: *Analytische Geometrie*

Ausprägung analytische Geometrie und lineare Algebra.

II Eingrenzung des Prüfungsgebiets

Eine Schülerin / ein Schüler schlägt als Thema für seine Präsentationsprüfung „ein komplexes Wachstumsmodell“ vor. Lehrerin / Lehrer und Schülerin / Schüler einigen sich darauf, dass das gesuchte Modell sich in Teilen an bekannte Modelle (aus Modul 3) anlehnt. Es sollen aber auch Unterschiede belegt werden.

Grundlegendes Niveau

Bei grundlegendem Niveau wird das vorliegende Modell mit dem Modell von Leslie verglichen. Dazu sollte im Unterricht das spezielle Modell mit den dazugehörigen Einschränkungen kurz besprochen werden. So kann ein Prüfling wenigstens einen einfachen Unterschied benennen, was vielleicht auch hilft, weitere Unterschiede zu benennen und bewerten.

Erhöhtes Niveau

Bei erhöhtem Niveau erwartet man insbesondere Verstehen des gegebenen Modells, sodass auch Vor- und Nachteile dieses Modells aufgezeigt werden können und der Vergleich mit anderen Modellen aus dem Bereich der Analysis möglich wird.

Das Gespräch nach der Präsentation sollte für einige Fragen zur Analysis im gegebenen Kontext – aber auch darüber hinaus – offen sein.

III Aufgaben

Bevölkerungsentwicklung in Deutschland (erhöhtes Niveau)

Mit den Daten von 2005 ergab sich die folgende Übergangsmatrix:

$$L = \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0{,}066 & 0{,}97 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}029 & 0{,}925 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}066 & 0{,}972 \end{pmatrix}$$

- Berechnen und Bestimmen Sie eine Prognose für die Jahre 2025 und 2050.
- Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit professionellen Prognosen.

Grundlegendes Niveau:	Beschreiben und Beurteilen Sie das Modell und vergleichen Sie es mit dem Leslie-Modell.
Erhöhtes Niveau:	Beschreiben und Beurteilen Sie das Modell *auch unter der Berücksichtigung von einigen beispielhaften Übergangsfaktoren*.

Beachten Sie bitte die **folgenden Hinweise:**.

Wofür stehen die Daten?	Gruppe 1 0 – 14	Gruppe 2 15 – 49	Gruppe 3 50 – 64	Gruppe 4 Ab 65
Startwerte für 2005 (geschätzt, Mio.)	12,3	39,1	15,5	16,3
Sterberate	0,004	0,0011	0,0087	0,0276

- Zwischen Männern und Frauen wird nicht unterschieden.
- Jede Frau bringt statistisch im Alter von 15 bis 49 Jahre 1,4 Kinder zur Welt

IV Erwartungshorizont

Dieser Erwartungshorizont bezieht sich auf die Aufgabenstellung, nicht auf die vom Prüfling zu erarbeitende und in der Dokumentation darzustellende Konkretisierung. Der vom Prüfer in der echten Prüfungssituation zu erstellende Erwartungshorizont muss sich dagegen auf die Dokumentation beziehen.

Grundlegendes Niveau:

- Da sie den Rechnungen im Modul 3 entsprechen, ist das eine Reproduktion. **AFB I**
- Vergleich der Daten mit professionellen Prognosen
- Dazu ist in der Regel die gesamte Population, also die Summe aller Population. Hier wird ein (kleiner) Transfer erwartet. Die folgenden Rechnungen sind eher Reproduktion **AFB I/II**
- Beschreiben und Beurteilen des Modells
- ist der schwierigste Teil, da hier die Gruppeneinteilung ungewöhnlich ist. Verständnis des Modells ist nötig, um darüber zu berichten. Dazu könnte der Prüfling zur Visualisierung einen geeigneten Übergangsgraphen verwenden **AFB II/III**
- Vergleich mit Leslie-Modell
- Wenn das Leslie-Modell mit seinen Einschränkungen im Unterricht behandelt wurde, ist wenigstens ein einfacher Einstieg in diesen Vergleich möglich.
- Die leere Hauptdiagonale bei Leslie bedeutet, dass kein Individuum in seiner Gruppe mehr als einen Zeittakt verbleibt. (Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen.) **AFB I/II**
- Weiteres Verallgemeinern und Reflektieren kann noch zu dem Anforderungsbereich III führen **AFB III**
- Beim Gespräch nach der Präsentation geht es um Souveränität gegenüber Nachfragen.
- Hinzu kommt die Bewertung der Präsentation und des Gesprächs, das sich der Analysis nähert (letzteres ist gegebenenfalls Zusammenhänge herstellen), **AFB II**
- Da dieser Abschnitt sehr von der vorhandenen Restzeit abhängt, hängt auch die mögliche Bewertung davon ab.

Erhöhtes Niveau:

- Die Berechnungen und Vergleiche sind im ersten Teil der Prüfung gleichwertig.
- In diesem Niveau sollten aber das Vernetzen und das Herstellen von Zusammenhängen deutlich sichtbar sein. **AFB I/II**.
- Die Beschreibung des Modells sollte ebenfalls tiefer gehen, also z.B. wird das Modell sicher beschrieben, die Vergleiche mit professionellen Erhebungen differenziert ausgeführt. **AFB II/III**
- Die Beschreibung des Modells wird wegen der Kürze der Zeit beispielhaft erläutert:

  Die Gruppen sind so eingerichtet, dass alle zu der Taktrate 1 (Jahr) kompatibel sind. In Ansätzen sollte der Schüler / die Schülerin wenigstens eine Beispielrechnung vortragen. Da die Gruppen nicht nach Geschlecht unterschieden werden (gegeben), nimmt man an, dass in der 2. Gruppe 50% Frauen sind.

  Dort sind 35 Jahrgänge, also je Altersjahr 1/35 der Gesamtzahl, gerundet 0,03. Werden die gegebenen Daten noch weiter reflektiert und verallgemeinert, wird das höchste Niveau erreicht **AFB III**.

- Beurteilung des Modells
- Zur Beurteilung lässt sich z.B. sagen, dass durch die Aufteilung der Bevölkerung in 4 Gruppen die Gliederung schwächer wird, und so weniger Variation möglich ist. Die Entwicklung der einzelnen Gruppen bleibt aber sichtbar, wenn man die Anzahl in jeder der Gruppen ermittelt und geeignet darstellt.
  Werden noch einige Vernetzungen hergestellt im Verallgemeinern und Reflektieren, so wäre hier **AFB II/III**.
- An diesen Punkt lässt sich im Gespräch hier gut mit Modellen der Analysis anknüpfen, was nach der Erwartung in den vorherigen Bereichen offenbar zu guten Ergebnissen führen sollte, analog mit den Nachfragen zur Präsentation.

V Bewertungskriterien für "ausreichend" und „gut“

Eine „ausreichende“ Leistung ist erbracht:

Erhöhtes Niveau:	Es bleibt über weite Teile der AFB I (Reproduktion), an manchen Stellen geht es darüber hinaus, nämlich bei der Beschreibung des gegebenen Modells, das eher dem AFB II genügt. Zudem zeigt der Schüler / die Schülerin deutliche Ansätze von Vernetzung. Weitgehend bleibt aber AFB I, der gelegentlich von AFB II unterbrochen ist. Somit wird ein „ausreichend“ erreicht.
Grundlegendes Niveau:	Rechnungen und gute Ansätze von Erklärungen prägen den Anfang, d.h. der Prüfling geht gelegentlich weiter als reproduzieren : AFB I / II. Beim Beschreiben und Beurteilen des gegebenen Modells sind Ansätze sichtbar, die in Richtung AFB II gehen. Das ist immerhin bei dieser Aufgabe auch nicht einfach zu erreichen. Es bleibt meist bei dem Anforderungsbereich I, der aber öfter positive Entwicklungen zeigte (AFBII). Somit wird ein „ausreichend“ erreicht.

Eine „gute“ Leistung ist erbracht:

Erhöhtes Niveau:	Die Beschreibung und Beurteilung des Modells genügt dem AFB III. Das zeigt Reflexion und das Herstellen von Zusammenhängen, aber auch Souveränität Die Anknüpfung an die Analysis gelang leider weniger gut, hier ging es von der Reproduktion bis zum Transfer (AFB I/II) Auch im anschließenden Gespräch tat sich der Prüfling schwer. Damit wird der AFB III für ein „sehr gut“ zu deutlich unterbrochen: So ergibt sich zusammen ein „gut“.
Grundlegendes Niveau:	Beschreibung und Beurteilung des gegebenen Modells gelang sehr gut, die Beschreibung unterstütze der Prüfling durch Visualisierung. Das ist AFB III. Der Vergleich mit dem Modell von Leslie gelang nicht so gut, er beschränkte sich weitgehend auf Reproduktion. (AFB I/II). Berechnungen und Prognosen waren korrekt, der Vergleich mit professionellen Prognosen enthielt Rechen- und Argumentationsmängel. (AFB I/II). Zusammen ergibt sich die Note „gut“.

Schwingungen

Mathematik AN 1 (grundlegendes und erhöhtest Niveau)

I Thema im unterrichtlichen Zusammenhang

Der Rahmenplan Gymnasiale Oberstufe sieht für das erste Semester das Thema Analysis vor. In diesem Zusammenhang werden Funktionen an Daten angepasst, vornehmlich ganz rationale Funktionen. Die Behandlung der sin-Funktion erfolgt ebenfalls jedoch mit anderer Schwerpunktsetzung.

II Eingrenzung des Prüfungsgebietes

Die Schülerin / der Schüler schlägt als Thema für seine Präsentationsprüfung vor, Analysis im physikalischen Sachzusammenhang zu behandeln. Lehrerin / Lehrer und Schülerin / Schüler einigen sich auf die Untersuchung von Schwingungen, deren Beschreibung und Modellierung mit den Mitteln der Analysis.

Für das erhöhte Niveau wird die Erläuterung und Anwendung einer Differentialgleichung ergänzt.

Eine dem Thema angemessene Präsentationsform wird erwartet, aber nicht vorgegeben.

III Aufgabenstellung

Es wird eine Wertetabelle vorgegeben, die Messwerte zu einer gedämpften Schwingung darstellen. Diese Messwerte sollen durch eine geeignete Funktion beschrieben werden, wobei die verwendeten Funktionstypen mit ihren Eigenschaften in Bezug zum Sachzusammenhang erläutert werden.

t	f(t)
0	20,0000
0,08	18,3688
0,16	15,8603
0,24	12,7108
0,32	9,1685
0,4	5,4773
0,48	1,8641
0,56	-1,4729
0,64	-4,3720
0,72	-6,7141
0,8	-8,4241
0,88	-9,4714
0,96	-9,8662
1,04	-9,6552
1,12	-8,9146
1,2	-7,7428
1,28	-6,2525
1,36	-4,5627
1,44	-2,7911
1,52	-1,0476
1,6	0,5710
1,68	1,9855
1,76	3,1366
1,84	3,9864
1,92	4,5183
2	4,7355
2,08	4,6590
2,16	4,3242
2,24	3,7778
2,32	3,0732
2,4	2,2676
2,48	1,4177
2,56	0,5769
2,64	-0,2079
2,72	-0,8976
2,8	-1,4629
2,88	-1,8847
2,96	-2,1541
3,04	-2,2717
3,12	-2,2471
3,2	-2,0966
3,28	-1,8421
3,36	-1,5094
3,44	-1,1256
3,52	-0,7181
3,6	-0,3127
3,68	0,0676
3,76	0,4037
3,84	0,6811
3,92	0,8902
4	1,0263
4,08	1,0893
4,16	1,0833
4,24	1,0160
4,32	0,8978
4,4	0,7408
4,48	0,5580
4,56	0,3627
4,64	0,1674
4,72	-0,0168
4,8	-0,1805
4,88	-0,3166
4,96	-0,4201
5,04	-0,4887
5,12	-0,5220
5,2	-0,5220
5,28	-0,4921
5,36	-0,4373
5,44	-0,3633
5,52	-0,2763
5,6	-0,1828
5,68	-0,0887
5,76	0,0004
5,84	0,0801
5,92	0,1468
6	0,1980
6,08	0,2325
6,16	0,2500
6,24	0,2514
6,32	0,2383
6,4	0,2129
6,48	0,1780
6,56	0,1367
6,64	0,0919
6,72	0,0466
6,8	0,0035
6,88	-0,0353
6,96	-0,0679
7,04	-0,0933
7,12	-0,1106
7,2	-0,1197
7,28	-0,1210
7,36	-0,1153
7,44	-0,1036
7,52	-0,0872
7,6	-0,0676
7,68	-0,0461
7,76	-0,0243
7,84	-0,0035
7,92	0,0154
8	0,0314

IV Beispieldokumentation

A) Die Präsentation gliedert sich wie folgt:

1 Exponentialfunktion und sin-Funktion

1.1 Die Exponentialfunktion, die Basis e und die Ableitung der Exponentialfunktion

Exponentialfunktionen werden in Hinblick auf die auftretenden Parameter erläutert. Die Besonderheit der Basis *e* wird dargestellt. Es werden zwei verschiedene Darstellungsformen verwendet: mit Eulerscher Zahl und ohne.

1.2 Die Sinus-Funktion und die Bedeutung der Parameter

Die Sinus-Funktion $g(t) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$ wird hinsichtlich der auftretenden Parameter untersucht. Dabei werden die Begriffe Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung verwendet.

2 Die Eigenschaften der gedämpften Schwingung

2.1 Das Federpendel und die harmonische Schwingung

Die harmonische Schwingung wird am Beispiel des Federpendels erläutert. Der Zusammenhang der Frequenz mit der Federkonstanten und der schwingenden Masse wird beschrieben und die physikalische Deutung der Phasenverschiebung erläutert.

2.2 Das Federpendel und die gedämpfte Schwingung

Die gedämpfte Schwingung wird am Beispiel des Federpendels erläutert. Dabei wird der physikalische Hintergrund der Dämpfung und die mathematische Beschreibung angegeben.

2.3 Die Modellierung der vorgegebenen Daten

Die Daten werden analysiert und daraus auf die gesuchten Parameter geschlossen, teilweise durch Rechnung, teilweise können die Parameter direkt aus den Daten abgelesen werden.

2.4 Die zugehörige Differentialgleichung

Die Differentialgleichung zur gedämpften Schwingung wird angegeben und mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung wird nachgerechnet, dass die angegebene Funktion die Differentialgleichung erfüllt. Dabei wird ein Gleichungssystem aufgestellt und gelöst.

B) Die folgenden Quellen wurden verwendet:

Literatur

- http://de.wikipedia.org/wiki/Federpendel
- http://de.wikipedia.org/wiki/Gedämpfte_Schwingung
- Schülerduden Physik

C) Folgende Medien werden eingesetzt:

PowerPoint-Bildschirmpräsentation, die durch angemessene Animationen ergänzt wird.

V Erwartungshorizont

Dieser Erwartungshorizont bezieht sich auf die Aufgabenstellung und auf eine Beispieldokumentation für die vom Prüfling zu erarbeitende und in dieser Dokumentation darzustellende Konkretisierung.
Der vom Prüfer zu erstellende Erwartungshorizont muss sich auf die Dokumentation des Prüflings beziehen!

1 Exponentialfunktion und sin-Funktion

1.1 Die Exponentialfunktion, die Basis e und die Ableitung der Exponentialfunktion

Erläutern von $f(t) = b \cdot a^t$ und $f(t) = b \cdot a^{c \cdot t}$ in Hinblick auf den Einfluss der Parameter auf den Verlauf der Funktion. Bildung der Ableitung und Erläuterung der Besonderheit der Basis e.

Anforderungsbereich I

1.2 Die Sinus-Funktion und die Bedeutung der Parameter

Erläutern von $g(t) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$ in Hinblick auf den Einfluss der Parameter auf den Verlauf der Funktion (Strecken in x- und y- Richtung, verschieben der Funktion). Zuordnen der Physikalischen Ausdrücke Amplitude, Frequenz, Schwingungsdauer und Phasenverschiebung zu den Parametern. Bildung der Ableitung und Erläuterung deren physikalischer Bedeutung.

Anforderungsbereich I bis II

2 Die Eigenschaften der gedämpften Schwingung

2.1 Das Federpendel und die harmonische Schwingung

Die Besonderheit harmonische Schwingung wird am Beispiel des Federpendels erläutert. Die Proportionalität von Auslenkung und rücktreibender Kraft wird genannt. Der Zusammenhang der Frequenz mit der Federkonstanten und der schwingenden Masse wird beschrieben und die physikalische Deutung der Phasenverschiebung und der Amplitude erläutert.

Anforderungsbereich II

2.2 Das Federpendel und die gedämpfte Schwingung

Die gedämpfte Schwingung wird am Beispiel des Federpendels erläutert. Dabei wird der Einfluss der Reibung thematisiert und die Modellierung mit Hilfe der Exponentialfunktion unter Erläuterung des Einflusses der Parameter erklärt.

Anforderungsbereich II

2.3 Die Modellierung der vorgegebenen Daten

Zu der Funktion $x(t) = A \cdot e^{c \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$ werden auf Grundlage der ausgegebenen Daten die Parameter erschlossen. Hierbei unterschiedliche Vorgehensweisen möglich. Gezieltes Probieren mit Hilfe einer Tabellenkalkulation ist ein erfolgreicher Lösungsweg, wenn der Prozess erklärt wird und der Prüfling verdeutlich, mit welchem Ziel er jeweils bestimmte Variationen vornimmt.

Das geschickte entnehmen von Datenpaaren aus der Tabelle zum Ermitteln einzelner Parameter mit argumentativer Begründung stellt ein hochwertiges Vorgehen dar. Daneben ist es möglich bzw. nötig, einzelne oder mehrere Parameter mit Hilfe von aufgestellten Gleichungen / Gleichungssystemen zu bestimmen. Die Kombination von verschiedenen Vorgehensweisen zeigt Souveränität im Umgang mit dem Stoffgebiet.

Anforderungsbereich III im grundlegenden Niveau, II-III im erhöhten Niveau

2.4 Die zugehörige Differentialgleichung

Die Differentialgleichung $m\ddot{x} + R\dot{x} + Dx = 0$ bzw. $r\ddot{x} + s\dot{x} + x = 0$ zur gedämpften Schwingung wird angegeben und in den Grundzügen erläutert. Die ersten und zweiten Ableitung werden vorgerechnet und in die Differentialgleichung eingesetzt. Die entstehende Gleichung wir nach sinus und cosinus Termen sortiert und daraus ein Gleichungssystem für die gesuchten Parameter angegeben. Die Lösung wird genannt.

Anforderungsbereich III für erhöhtes Niveau

VI Mögliche Fragen für den zweiten Prüfungsteil

- „Die Exponentialfunktion, die Basis e und die Ableitung der Exponentialfunktion“
  - Geben Sie ein Beispiel an, in dem die Exponentialfunktion außerhalb der Physik verwendet wird. (Anforderungsbereich I)
  - Wie erhält man fallende bzw. steigende Funktionen bei Verwendung der Basis *e* ? (Anforderungsbereich I)
  - Stellen Sie $f(x) = 2^x$ mit Hilfe der Basis *e* dar. (Anforderungsbereich II)
- „Die Sinus-Funktion und die Bedeutung der Parameter“
  - Bilden Sie die erste und zweite Ableitung der auf der Folie gezeigten Funktion $g(t)$. Welche physikalische Bedeutung haben diese in dem Sachkontext? (Anforderungsbereich I)
  - Welche Situationen kann man neben dem Thema der Präsentation mit der sin-Funktion beschreiben? (Anforderungsbereich I)
  - Was ändert sich bei den Parametern, wenn man die identische Situation mit der cos-Funktion statt der sin-Funktion beschreibt? (Anforderungsbereich II)
- „Das Federpendel und die harmonische Schwingung“
  - Was genau bedeutet: „φ hängt von dem Beginn der Zeitmessung ab“? (Anforderungsbereich II)
  - ω ist die Kreisfrequenz, sin und cos sind „Winkelfunktionen am Kreis“. Stellen Sie einen Bezug zwischen dem schwingenden Massestück und eine Kreisbewegung her. (Anforderungsbereich II-III)
- „Das Federpendel und die gedämpfte Schwingung“
  - Was geschieht, wenn $c > 0$ ist? (Anforderungsbereich I)
  - Das Sinken der Amplitude wird mit einem Exponentialausdruck beschrieben. Wie sinkt demnach die Amplitude in gleichen Zeitabschnitten qualitativ? (Anforderungsbereich I)
- „Die Modellierung der vorgegebenen Daten“
  - Skizzieren Sie die Funktion, die Sie heraus gefunden haben, an der Tafel (Anforderungsbereich I)

- Begründen sie $j = -\frac{p}{2}$ ausführlich. (Anforderungsbereich II)
- Stellen sie die Rechnung zur Bestimmung von *c* dar. (Anforderungsbereich II)
- Was ändert sich, wenn man statt sin die cos-Funktion verwendet? (Anforderungsbereich II)
- Sehen Sie andere Vorgehensweisen zur Modellierung der Daten? (Anforderungsbereich II)
- Wie müssen sie vorgehen, wenn die Daten nicht so „gutmütig“ sind, d.h. man nicht sofort einzelne Parameter ablesen kann? (Anforderungsbereich III)

- *„Differentialgleichung“*
  - Rechnen Sie die erste Ableitung vor. (Anforderungsbereich I)
  - Stellen Sie dar, wie sie zu *r* und *s* gekommen sind. (Anforderungsbereich III)
  - Setzen in der Differentialgleichung R=0, ignorieren Die also die Reibung. Welcher physikalischer Sachverhalt wird dann hier ausgedrückt?
  - Warum steht die Reibung vor $\dot{x}$?

VII Bewertungskriterien für „gut“ und „ausreichend

Eine gute Leistung ist erbracht, wenn

Der Sachvortrag die Prüfungsanteile im Anforderungsbereich I und II vollständig enthält bzw. auf Nachfrage angeben kann sowie die weiterführenden Fragen zu diesem Prüfungsteil so beantwortet werden, dass von einem guten Verständnis der dargestellten Inhalte ausgegangen werden kann.

Eine ausreichende Leistung ist erbracht, wenn

Der Sachvortrag die Prüfungsanteile im Anforderungsbereich I vollständig und II in kleinen Teilen enthält bzw. auf Nachfrage angeben kann sowie die weiterführenden Fragen zu diesem Prüfungsteil so beantwortet werden, dass von einem Verständnis der dargestellten Inhalte ausgegangen werden kann.

Binomialveteilung

Mathematik Sto 1 (grundlegendes und erhöhtest Niveau)

I Thema im unterrichtlichen Zusammenhang

Der Rahmenplan Gymnasiale Oberstufe sieht das Thema Stochastik vor. In diesem Zusammenhang wird die Binomialverteilung, nicht jedoch deren Erweiterung Multinomialverteilung behandelt.

II Eingrenzung des Prüfungsgebietes

Die Schülerin / der Schüler schlägt als Thema für seine Präsentationsprüfung vor, Stochastik mit den behandelten Beispielen zu behandeln. Lehrerin / Lehrer und Schülerin / Schüler einigen sich auf die Untersuchung von Binomialverteilung an einem Beispiel und die Ergänzung um die Multinomialverteilung.

Für das erhöhte Niveau werden die Begriffe Erwartungswert und Varianz ergänzt.

Eine dem Thema angemessene Präsentationsform wird erwartet, aber nicht vorgegeben.

III Aufgabenstellung

Es wird ein einfaches Beispiel für ein binomialverteiltes Zufallsexperiment vorgegeben: Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne, mit drei blauen und fünf roten Kugeln. Anhand dieses Beispiels sollen die Eigenschaften der Binomialveteilung erläutert werden. Anschließend soll die Situation modifiziert werden durch Hinzufügen von vier gelben Kugeln. Die Auswirkungen auf das Zufallsexperiment und die dazugehörige Multinomialverteilung sollen erläutert werden, im erhöhten Niveau auch unter Verwendung der Begriffe Erwartungswert und Varianz.

IV Beispieldokumentation

A) Die Präsentation gliedert sich wie folgt:

3 Die Binomialverteilung

3.1 Typisches Baumdiagramm

Das Baumdiagramm zu dem gegebenen Beispiel wird dargestellt und erläutert. Dabei wird auf die Besonderheit der Baumdiagramme bei der Binomialverteilung eingegangen.

3.2 Binomialkoeffizienten

Die Bedeutung der Binomialkoeffizienten und die Methoden zu ihrer Berechnung werden erläutert und begründet. Die Berechnung geschieht einerseits über das Pascaldreieck, andererseits über die Formel mit den Fakultäten, die am Beispiel des Lotto-Ziehens erklärt wird.

3.3 Die Formel und das Beispiel

Die Formel für die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung wird erläutert und am Beispiel angewendet. Dazu werden die Ergebnisse von 1.1 und 1.2 zusammengeführt und für $n = 4$ zu dem vorgegebenen Beispiel die Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet.

4 Urne mit drei Farben

4.1 Baumdiagramm und Rechnung

Das Baumdiagramm zu dem gegebenen Beispiel wird dargestellt und erläutert. Dabei wird genau so vorgegangen, wie bei den Binomialbäumen, dass die Pfade zu gleichen Kombinationen von Farben zusammen geführt werden.
Für einige Beispiele wird die Wahrscheinlichkeit ausgerechnet und mit den Binomialwahrscheinlichkeiten verglichen.

4.2 Multinomialverteilung

Die Multinomialverteilung und die zugehörige Formel werden erläutert. Die Multinomialverteilung ist eine Erweiterung der Binomialverteilung. Dieser Zusammenhang wird erklärt.

4.3 Eigenschaften der Multinomialverteilung

Erwartungswert und Varianz der Multinomialverteilung werden bestimmt und gedeutet.

B) Die folgenden Quellen wurden verwendet:

Literatur

- Lehrbuch der Schule

Internet

- http://de.wikipedia.org/wiki/Binomialverteilung
- http://de.wikipedia.org/wiki/Multinomialverteilung

C) Folgende Medien werden eingesetzt:

PowerPoint-Bildschirmpräsentation, die durch angemessene Animationen ergänzt wird.

V Erwartungshorizont

Dieser Erwartungshorizont bezieht sich auf die Aufgabenstellung und auf eine Beispieldokumentation für die vom Prüfling zu erarbeitende und in dieser Dokumentation darzustellende Konkretisierung.
Der vom Prüfer zu erstellende Erwartungshorizont muss sich auf die Dokumentation des Prüflings beziehen!

1 Die Binomialverteilung

1.1 Typisches Baumdiagramm

Das Baumdiagramm zu dem gegebenen Beispiel wird dargestellt und die Wahrscheinlichkteintn und die inhaltliche Bedeutung der Knotenpunkte erläutert. Dabei wird auf die Besonderheit der Baumdiagramme bei der Binomialverteilung (zusammenführen der Pfade, die zu einem Zustand mit bestimmter Anzahl roter und blauer Kugeln gehört) eingegangen. Die Beziehung zur Struktur des Pascaldreiecks wird angegeben.

Anforderungsbereich I

1.2 Binomialkoeffizienten

Die Bedeutung der Binomialkoeffizienten und die Methoden zu ihrer werden erläutert und begründet. Die Berechnung geschieht einerseits über das Pascaldreieck, andererseits über die Formel mit den Fakultäten, die am Beispiel des Lotto-Ziehens erklärt wird. Dabei wird sich von den konkreten Zahlen gelöste und Erklärungen mit Ausdrücken wie „k-mal ziehen“, „aus n-Kugeln auswählen“ verwendet.

Anforderungsbereich II

1.3 Die Formel und das Beispiel

Die Formel für die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung wird erläutert und am Beispiel angewendet. Dazu werden die Ergebnisse von 1.1 und 1.2 zusammengeführt und für n = 4 zu dem vorgegebenen Beispiel die Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet.

Anforderungsbereich II

2 Urne mit drei Farben

2.1 Baumdiagramm und Rechnung

Das Baumdiagramm zu dem gegebenen Beispiel wird für zweimaliges Ziehen dargestellt und erläutert. Dabei wird genau so vorgegangen, wie bei den Binomialbäumen, dass die Pfade zu gleichen Kombinationen von Farben zusammen geführt werden. Für einige Beispiele wird die Wahrscheinlichkeit vorgerechnet und mit den Binomialwahrscheinlichkeiten verglichen. Die Strukturähnlichkeit zum Baumdiagramm und zu den Rechenschritten bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Vergleich zur Binomialverteilung wird erläutert.

Anforderungsbereich II bis III

2.2 Multinomialverteilung

Die Multinomialverteilung und die zugehörige Formel werden erläutert. Die Multinomialverteilung ist eine Erweiterung der Binomialverteilung. Dieser Zusammenhang wird erklärt indem die Binomialverteilung als Spezialfall dargestellt wird und am konkreten Beispiel die Wahrscheinlichkeitspotenzen begründet werden.

Anforderungsbereich III, erhöhte Niveau II bis III

2.3 Eigenschaften der Multinomialverteilung

Erwartungswert und Varianz der Multinomialverteilung werden bestimmt und gedeutet. Die Zusammenhänge der Formeln zwischen Multinomialverteiung und Binomialverteilung werden begründet.

Anforderungsbereich III für erhöhtes Niveau

VI Mögliche Fragen für den zweiten Prüfungsteil

- Baumdiagramm:
  - Wo stehen in dem Baumdiagramm alle Zustände für festes k? (Anforderungsbereich I)
  - Wie viele Enden hätte das Baumdiagramm nach dem 4. / n-ten Zug, wenn man die Enden nicht zusammenführt? (Anforderungsbereich I ggfs. II, falls im Unterricht nicht behandelt)
  - Was ändert sich gegenüber der Aufgabenstellung, wenn man ohne Zurücklegen zieht? (Anforderungsbereich III)
- Binomialkoeffizienten
  - Ergänzen Sie die Zeilen für n=5 und n=6 in dem Pascaldreieck. (Anforderungsbereich I)
  - Wie groß ist 100 über 0? Wie groß ist 100 über 100? (Anforderungsbereich I)
  - Wie groß ist 20 über 1? Wie groß ist 20 über 19? (Anforderungsbereich I)
  - Erläutern Sie, warum 6! die Anzahl der Möglichkeiten ist, 6 vorgegebene Kugeln beim Lotto zu ziehen. (Anforderungsbereich II)
- Formel und Beispiel
  - In einer Urne sind 10 rote und 15 blaue Kugeln. Sie ziehen 7 Mal mit Zurücklegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, 4 rote Kugeln zu ziehen. (Anforderungsbereich I)
  - Betrachten Sie zu ihrem Beispiel n=100 und skizzieren Sie den Graph der Verteilung grob an der Tafel. Welche Bedeutung bekommt der Erwartungswert hier? (Anforderungsbereich III)
- Drei Farben Baumdiagramm
  - Berechnen Sie P(2G, 1B) (Anforderungsbereich I)
  - Wie viele Enden hätte dieses Baumdiagramm im vierten Zug? (Anforderungsbereich I)
  - Lösen Sie sich von der Ebenen Darstellung des Baumdiagramms. Wie könnte man das Baumdiagramm darstellen, so dass es systematisch und einfach wird? (Anforderungsbereich III)
- Multinomialverteilung
  - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(4R, 3B, 2G) (Anforderungsbereich I)
  - Führen Sie aus was heißt „die man auch ähnlich begründen kann." Bzw. Wie kann man den Faktor vor den Wahrscheinlichkeitspotenzen kombinatorisch deuten? (Anforderungsbereich III)
- Eigenschaften der Multinomialverteilung
  - Welche Anzahlen Erwartet man bei ihrem Beispiel bei 100 Zügen und wie streuen diese? (Anforderungsbereich II)
  - Wie ist die Varianz definiert und in welche Aussagen erlaubt sie für ein Zufallsexperiment? (Anforderungsbereich II)

VII Bewertungskriterien für „gut“ und „ausreichend

Eine gute Leistung ist erbracht, wenn

Der Sachvortrag die Prüfungsanteile im Anforderungsbereich I und II vollständig enthält bzw. auf Nachfrage angeben kann sowie die weiterführenden Fragen zu diesem Prüfungsteil so beantwortet werden, dass von einem guten Verständnis der dargestellten Inhalte ausgegangen werden kann.

Eine ausreichende Leistung ist erbracht, wenn

Der Sachvortrag die Prüfungsanteile im Anforderungsbereich I vollständig und II in kleinen Teilen enthält bzw. auf Nachfrage angeben kann sowie die weiterführenden Fragen zu diesem Prüfungsteil so beantwortet werden, dass von einem Verständnis der dargestellten Inhalte ausgegangen werden kann.

Sammelkartenproblem

Hinweis: Ein Schüler/eine Schülerin, der/die dieses Thema wählt, sollte einen persönlichen Bezug zu Sammelkartenspielen haben. Das ist wichtig für die Motivation.

I Thema im unterrichtlichen Zusammenhang

Der Rahmenplan Gymnasiale Oberstufe sieht für das Erhöhte Niveau in Modul 5: „Anwendungsprobleme der Stochastik“ das Stellen von Problemen als Stochastische Prozesse, das Beschreiben derselben mithilfe von Übergangsgraphen und das Lösen solcher Probleme vor. Das Sammelkartenproblem (oder auch Problem der vollständigen Serie) lässt sich als Stochastischer Prozess betrachten. Die Kenntnis von Markovprozessen ist hierbei hilfreich, aber nicht zwingend erforderlich.

II Eingrenzung des Prüfungsgebietes

Die Schülerin / der Schüler schlägt als Thema für seine Präsentationsprüfung das Sammelkartenproblem am Beispiel des Sammelkartenspiels „Magic – the Gathering“ vor. Lehrerin / Lehrer und Schülerin / Schüler einigen sich darauf, dass die Regeln des Spieles keine Rolle im Vortrag spielen sollen, da sie für das Problem nicht relevant sind. Die Zusammensetzung der Verkaufspackungen (Booster) ist in diesem Zusammenhang jedoch wichtig und soll deshalb auch dargestellt werden. Es wird vereinbart, dass die Modellierung schrittweise verfeinert werden soll, bis zu einem Punkt, an dem sie eine zufriedenstellende Genauigkeit erreicht. Das Finden dieses Punktes ist Teil der Aufgabe und soll von der Schülerin/vom Schüler selbst geleistet und begründet werden.

Es wird weiter vereinbart, dass das Problem anhand der aktuellen Edition „Rise of Eldrazi“ untersucht wird. Der Aufbau der Edition soll nur soweit dargestellt werden, wie es für die Lösung des Problems notwendig ist.

Eine dem Thema angemessene Präsentationsform wird erwartet, aber nicht vorgegeben.

III Aufgabenstellung

Sammelkartenproblem.

Beim Sammelkartenspiel „Magic – the Gathering“ erscheint alle vier Monate eine neue Edition von Karten. Die Karten werden in Packungen (sogenannten Boostern) zu je 16 Karten verkauft. Jeder Booster enthält eine festgelegte Anzahl unterschiedlich häufiger Karten.

Wie viel Geld muss man durchschnittlich ausgeben, um beim Sammelkartenspiel „Magic - the Gathering“ alle Karten der aktuellen Edition durch den Kauf von Boostern zu bekommen?

- Recherchieren Sie, wie die aktuelle Edition aufgebaut ist: Wie viele Karten hat sie? Welche Seltenheitsstufen kommen wie oft vor? Wie viele Karten von welcher Seltenheitsstufe enthält ein Booster?
- Modellieren Sie das Problem, indem Sie Annahmen und Vereinfachungen festlegen. Löse Sie das Problem mit angemssener Genauigkeit.
- Reflektieren Sie Ihre Modellierung.

IV Beispieldokumentation

A) Die Präsentation gliedert sich wie folgt:

- **Darstellung der Boosterzusammensetzung**

  Die verschiedenen Seltenheitsstufen der Karten werden erläutert und die Zusammensetzung der Booster in der Edition Rise of Eldrazi dargestellt.
- **Darstellung der Zusammensetzung der aktuellen Edition**

  Es wird dargestellt, wie viele verschiedene Karten von welcher Seltenheitsstufe in der Edition Rise of Eldrazi enthalten sind und wie die vollständige Serie hier definiert wird.
- **Stufenweise Modellierung des Sammelkartenproblems**

  Das Problem wird schrittweise modelliert, bis zu einem Punkt, an dem eine vernünftige Genauigkeit erreicht ist. Die Grenzen der eigenen Modellierung werden dabei erläutert.
  - Stufe 1 der Modellierung: Mythic Rares
  - Stufe 2 der Modellung: Rares
  - Stufe 3 der Modellierung: Uncommons

- Fazit und Beantwortung der Leitfrage

  Die Leitfrage wird beantwortet und die Modellierung kritisch hinterfragt.

B) Quellen:

- Zur Verteilung der Seltenheitsstufen auf die aktuelle Edition: www.mercadia.de
- Zur Kartenverteilung pro Booster: www.de.wikipedia.org
- Zur Stochastik bei Magic: www.masters-of-pain.de/board/viewtopic.php?f=13&t=583

C) Folgende Medien werden eingesetzt:

PowerPoint-Bildschirmpräsentation, die teilweise in Schritten aufgedeckt und durch eine Tabellenkalkulation ergänzt wird.

V Erwartungshorizont

Dieser Erwartungshorizont bezieht sich auf die Aufgabenstellung und auf obenstehende Beispieldokumentation für die vom Prüfling zu erarbeitende und in dieser Dokumentation darzustellende Konkretisierung.
Der vom Prüfer zu erstellende Erwartungshorizont muss sich auf die Dokumentation des Prüflings beziehen!

1. Darstellung der Boosterzusammensetzung

Jeder Booster enthält 16 Karten: Eine Seltene (Rare), 3 weniger Häufige (Uncommon), 10 Häufige (Common), ein Standardland und eine Karte, die entweder eine Regelerläuterung enthält, oder die als Spielstein (Token) benutzt werden kann. Token- und Regelkarte sind nicht spielrelevant und müssen deshalb auch nicht zur vollständigen Serie gezählt werden. Jeder 8. Booster enthält statt der seltenen Karte eine besonders seltene Karte (Mythic Rare).

Tatsächlich sind in etwa einem siebtel der Booster noch glitzernde Karten (sogenannte Foils) eingestreut, die dann eine häufige Karte ersetzen. Diese Karten können alle Seltenheitsstufen besitzen. Für die Modellierung müssen diese Karten nicht berücksichtigt werden.

Es kommen in keinem Booster doppelte Karten vor. Die Booster werden im Handel zu einem Preis von 4 Euro pro Stück verkauft, im Internet erhält man sie jedoch gerade bei größerer Stückzahl ab 2,50 Euro.

Es gibt in der Magic-Community keine ernsthaften Zweifel daran, dass die Karten tatsächlich in der angegebenen Häufigkeit hergestellt werden, weil die Seltenheitsstufen farblich gekennzeichnet sind (rote, goldene, silberne und schwarze Editionssymbole) und weil Erfahrungsberichte die Zusammensetzung bestätigen.

2. Zusammensetzung der aktuellen Edition

Die Edition Rise of Eldrazi (erschienen Februar 2010) enthält 15 Mythic Rares, 53 Rares, 60 Uncommons, 100 Commons, die Standardländer sind nicht aus dieser Edition, sondern aus der vorhergehenden. Es sind also 228 verschiedene Karten.

Anforderungsbereich I

3. Stufenweise Modellierung des Sammelkartenproblems

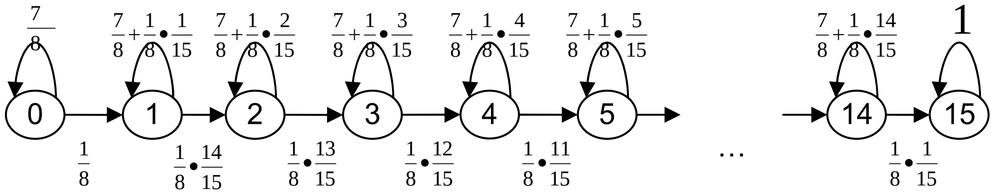
A) Betrachtung der Mythic Rares:

Es ist sinnvoll, nicht die Ereignisbäume zu betrachten, sondern nur die Zustände, also die Anzahl an verschiedenen Mythic Rares, die man bereits hat. Dadurch hat man nicht unendlich viele mögliche Bäume, sondern endlich viele Zustände und muss dann die Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Zustand in die möglichen anderen betrachten.

Wenn man einen Booster öffnet, hat man in einem Achtel der Fälle eine Mythic Rare und geht damit in den nächsten Zustand über, wenn man diese noch nicht hat. In allen anderen Fällen verbleibt man in dem Zustand, in dem man bereits ist.

Ob man die Karte bereits hat, hängt natürlich davon ab, wie viele verschiedene man bereits besitzt. Die Wahrscheinlichkeit, dass man eine Mythic Rare, die man aus dem Booster zieht, bereits hat, beträgt (Anzahl der verschiedenen Mythic Rares, die man hat)/(Gesamtanzahl der Mythic Rares).

a) Übergangsgraph



Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ enthält ein Booster eine Mythic Rare. Das heißt, dass man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{8}$ in dem Zustand verbleibt, in dem man bereits ist. Dazu kommt noch die Wahrscheinlichkeit, dass man zwar eine Mythic Rare zieht, aber dass man diese bereits hat. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist abhängig von der Anzahl verschiedener Mythic Rares, die man bereits besitzt. Wenn man noch keine hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit 0, wenn man eine hat $\frac{1}{15}$ bei zwei $\frac{2}{15}$ usw..

b) Aufstellen des Gleichungssystems

Wenn man jetzt den ersten Booster öffnet, bekommt man in einem Achtel der Fälle eine Mythic Rare und hat hinterher eine. Ansonsten bleibt man in dem Zustand, in dem man schon war und hat immer noch keine Mythic Rare. In jedem Fall hat man einen Booster bereits geöffnet. Daher muss man in jedem Fall 1 addieren.

Wenn man bereits eine Mythic Rare hat, und öffnet einen weiteren Booster, so kommt man nur dann in den Zustand in dem man zwei Mythic Rares hat, wenn man eine Mythic Rare zieht und diese außerdem noch nicht hat. Sonst bleibt man im Zustand „eine Mythic Rare“. In jedem Fall hat man einen Booster geöffnet.

Das geht so weiter, bis zum Zustand „15 Mythic Rares“. Wenn man diesen Zustand erreicht hat, öffnet man sinnvollerweise keine weiteren Booster, da man bereits alle Mythic Rares der Edition besitzt. Damit ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$t(0)=\frac{1}{8}\cdot t(1)+\frac{7}{8}\cdot t(0)+1$$

$$t(1)=\frac{1}{8}\cdot\frac{14}{15}\cdot t(2)+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{15}\cdot t(1)+\frac{7}{8}\cdot t(1)+1$$

$$t(2)=\frac{1}{8}\cdot\frac{13}{15}\cdot t(3)+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{15}\cdot t(2)+\frac{7}{8}\cdot t(2)+1$$

$$t(3)=\frac{1}{8}\cdot\frac{12}{15}\cdot t(4)+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{15}\cdot t(3)+\frac{7}{8}\cdot t(3)+1$$

$$t(4)=\frac{1}{8}\cdot\frac{11}{15}\cdot t(5)+\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{15}\cdot t(4)+\frac{7}{8}\cdot t(4)+1$$

$\ldots$

$$t(14)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{15}\cdot t(15)+\frac{1}{8}\cdot\frac{14}{15}\cdot t(14)+\frac{7}{8}\cdot t(14)+1$$

$$t(15)=0$$

Vereinfacht ergibt das:

$$t(0)=t(1)+8$$

$$t(1)=t(2)+\frac{120}{14}$$

$$t(2)=t(3)+\frac{120}{13}$$

$$t(3)=t(4)+\frac{120}{12}$$

$$t(4)=t(5)+\frac{120}{11}$$

$\ldots$

$$t(14)=t(15)+\frac{120}{1}$$

Also $t(14)=120; t(13)=180; t(12)=220; t(11)=250; ...; t(0)\approx 398{,}19$, also rund 400 Booster.

Bei einem Stückpreis von 2,50 Euro ergibt das 1000 Euro.

B) Betrachtung der Rares:

Die Überlegungen für die Rares sind nahezu identisch. Geändert hat sich nur die Anzahl der Karten (53 Rares) und die Wahrscheinlichkeit für das Finden einer Karte der gesuchten Seltenheitsstufe (sieben Achtel statt ein Achtel).

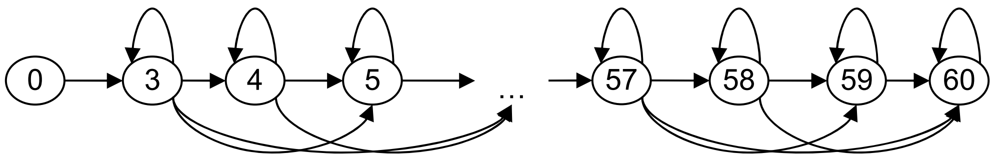
Ergebnis: $t(0)\approx 276{,}02$, was rund 690 Euro kosten würde.

Anforderungsbereich II

C) Betrachtung der Uncommons

Bei den Uncommons ist die Situation etwas komplizierter, da immer drei Uncommons in einem Booster sind. Sie können auch nicht als nacheinander gezogen interpretiert werden, da sie mit Sicherheit verschieden sind. Ihr Erscheinen ist also nicht stochastisch unabhängig.

a) Übergangsgraph



b) Ansatz zum Gleichungssystem

Hierbei handelt es sich um einen Auswahlprozess. Er ist vergleichbar mit dem Ziehen aus einer Urne, ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge, also vergleichbar mit dem Lotto-Modell. Vom Zustand „0“ kommt man mit der Wahrscheinlichkeit 1 in den Zustand „3“. Die Zustände „1“ und „2“ sind nicht zu erreichen. Von „3“ bis „57“ kann jeder Zustand wieder in sich selbst, oder in die drei nachfolgenden Zustände übergehen, je nachdem, wie viel „neue“ Uncommons man in dem Booster findet.

Das Gleichungssystem hat dann folgende Gestalt (Am Beispiel des Zustands „9“)

$$t(9)=\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{51}{0}}{\binom{60}{3}}\cdot t(9)+\frac{\binom{9}{2}\cdot\binom{51}{1}}{\binom{60}{3}}\cdot t(10)+\frac{\binom{9}{1}\cdot\binom{51}{2}}{\binom{60}{3}}\cdot t(11)+\frac{\binom{9}{0}\cdot\binom{51}{3}}{\binom{60}{3}}\cdot t(12)+1$$

c) Lösung:

Wenn man das dazugehörige Gleichungssystem auflöst, ergibt sich, dass man damit rechnen muss, 93 Booster zu öffnen, bevor man die Uncommons vollständig hat. Es geht also erheblich schneller als bei den Mythic Rares und Rares.

Eine Betrachtung der Commons ist nicht nötig, da sofort abzusehen ist, dass man diese lange vor den Uncommons vollständig hat.

Anforderungsbereich III

4. Fazit und Beantwortung der Leitfrage

Die Kartenart, die entscheidend dafür ist wie viele Booster man kaufen muss, sind die Mythic Rares. Genaugenommen besteht natürlich die Möglichkeit, dass man die Mythic Rares vollständig hat, die Rares, Uncommons oder Commons aber noch nicht. Zumindest für den Fall Mythic Rare-Rare wird sich das auswirken. Die Auswirkung wird jedoch nicht groß sein, da man davon ausgehen kann, dass man nach 400 Boostern mit großer Wahrscheinlichkeit auch etwas vollständig hat, was eine durchschnittliche Wartezeit von 276 Boostern hat.

Es bleibt also festzuhalten, dass man etwa 1000 Euro ausgeben muss, wenn man eine vollständige Edition nur durch das Kaufen von Boostern erhalten will.

Die Annahme, wann würde eine Edition nur durch den Kauf von Boostern sammeln ist allerdings nicht sehr realistisch. Tatsächlich wird es irgendwann günstiger, die fehlenden Karten einzeln zu kaufen, was zum Beispiel im Internet problemlos möglich ist.

Man könnte seine doppelten Karten auch mit anderen Sammlern tauschen, was ja gerade einer der interessantesten Aspekte des Sammelns ist. Wenn man niemanden zum Tauschen hat, kann man seine Doppelten Karten auch im Internet verkaufen und von dem Erlös selbst die fehlenden Karten erwerben.

Auf diese Weise ließen sich die Kosten erheblich senken.

Anforderungsbereich III

VI Mögliche Fragen für den zweiten Prüfungsteil

Neben Fragen, die das Verständnis und die Selbstständigkeit der Lösung überprüfen (z. B. Nachfragen nach dem Zustandekommen einzelner Zeilen des Gleichungssystems und nach Rechenschritten, oder Warum kann man die Uncommons nicht einfach so modellieren, als würde man drei Karten nacheinander ziehen?), kann man im anschließenden Gespräch auch weiterführende Fragen stellen:

1. Was für Anschlussprobleme an dieses Problem fallen ihnen ein?
2. Wo sehen sie Anwendungsbereiche für das, was sie eben ausgeführt haben?
3. Bis vor einigen Jahren hat der Hersteller der Magic-Karten nur die Unterteilung Rare-Uncommon-Common gehabt, wobei dann jeder Booster eine Rare enthielt. Was vermuten Sie, hat ihn zum Einführen der Mythic Rare bewogen?
4. Stellen sie sich vor, sie würden ein Sammelkartenspiel herausgeben wollen. Worauf würden sie achten?

VII Bewertungskriterien für „gut“ und „ausreichend“

Eine ausreichende Leistung ist erbracht, wenn

- die Schülerinnen und Schüler die Zusammensetzung der Booster und der Edition angemessen darstellen.
- sie mindestens die Mythic Rares oder Rares angemessen modellieren,
- sie in der Lage sind, Schwierigkeiten bei den anderen Modellierungsschritten angemessen darzustellen,
- sie eine geeignete Präsentationsform wählen und in der Lage sind, ein themengebundenes Gespräch zu führen.

Eine gute Leistung ist erbracht, wenn darüber hinaus

- die Schülerinnen und Schüler die Modellierung bis zu einer sinnvollen Genauigkeit durchführen
- sie die Grenzen ihrer Modellierung benennen und begründen
- sie eine geeignete Auswahl treffen, wann Rechenschritte zu erklären sind und wann es genügt, die Idee zu erläutern,
- sie das Thema in freier Rede darstellen und sich fachsprachlich sprachlich korrekt auszudrücken
- die Darstellung mathematisch korrekt ist,
- sie in der Lage sind auch einzelne Aspekte in den fachlichen Gesamtzusammenhang einzuordnen,
- sie den Modellierungsprozess und die Grenzen des Modells reflektieren. .

Bemerkung: Die Aufgabe lässt sich durch andere Sammelkartenspiele variieren: Pokemon, Yu-gi-oh … Auf Grundlegendem Niveau lässt sich die Idee ebenso nutzen. Der Markov-Prozess sollte da aber einfacher gestaltet sein. Dabei sollte man mit dem Öffnen immer nur eine Karte, Figur o. ä. erhalten. Beispiele dafür: Überraschungsei-Figuren, Rewe-Fußballbildchen … Ungeeignet sind Probleme, bei denen man nur mehrere gleich seltene Objekte erhält, wie z. B. Panini-Bilder, da der Einstieg in das Problem dann gleich sehr schwierig wird.

Impressum

Herausgeber:
Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung

Gestaltungsreferat: Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht

Referatsleitung: Werner Renz

Fachreferent: Winfried Euba

Redaktion: Dr. Andreas Busse
Manfred Dabelstein
Eckhard Lohmann
Peter Stender

Hamburg September 2010