Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Ergänzungsheft

Hinweise und Beispiele für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil

Impressum

Herausgeber:	Freie und Hansestadt Hamburg Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg
Referat:	Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung:	Monika Seiffert (kommisarisch)
Fachreferat Mathematik:	Manfred Bergunde und Xenia Rendtel

Die vorliegenden Aufgaben zum erhöhten Anforderungsniveau wurden von einer Arbeitsgruppe mit Vertretern aus den Ländern Bayern, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Sachsen und Schleswig- Holstein erarbeitet.

Die Aufgaben zum grundlegenden Anforderungsniveau wurden im Hamburger Fachreferat Mathematik entwickelt.

Veröffentlicht auf: http://www.li.hamburg.de/publikationen/abiturpruefung

Hamburg, am 29. März 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkung

Seit dem Abitur 2014 ist in der schriftlichen Prüfung ein hilfsmittelfreier Teil eingeführt, dessen Aufgaben zum erhöhten Anforderungsniveau von einer länderübergreifenden Arbeitsgruppe formuliert werden, jene zum grundlegenden Anforderungsniveau von der zuständigen Hamburger Aufgabenentwicklergruppe. Die Aufgaben des hilfsmittelfreien Prüfungsteils sind ohne elektronische Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner, Software) sowie ohne Tabellen oder Formelsammlung zu bearbeiten.

Für das erhöhte Niveau existieren im Länderverbund zwei Aufgabenpools, die sich dadurch unterscheiden, dass die Anforderungen der Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 unterhalb des Anforderungsbereichs III liegen, während die Anforderungen der Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2 diesen zumindest in einem Aufgabenteil erreichen. Die Aufgaben umfassen Lerninhalte aus jedem der Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/vektorielle Analytische Geometrie bzw. Stochastik und berücksichtigen die in der EPA Mathematik ermöglichten Alternativen vektorielle analytische Geometrie und Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen.

Die Bundesländer wählen für die Prüfungsteilnehmer, die auf erhöhtem Anforderungsniveau geprüft werden, drei Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 sowie eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2 aus. Die drei Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 decken die drei mathematischen Sachgebiete ab.

Für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil steht eine Bearbeitungszeit von 45 Minuten zur Verfügung. Die Bearbeitungszeit pro Aufgabe beträgt also ca. 11 Minuten. Pro Aufgabe können 5 Bewertungseinheiten (BWE) in Bezug auf eine Skala von 120 BWE für die gesamte Abiturprüfung erreicht werden.

Die Muster- und Beispielaufgaben in diesem Heft umfassen die Prüfungsaufgaben auf grundlegendem und erhöhten Anforderungsniveau aus dem Ausgabenpool für 2014.

2 Muster- und Beispielaufgaben für den Aufgabenpool 1

2.1 Analysis

Analysis 1 - Probeklausur 2014 (gA) — EH* S. 21

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f.

a) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f. **(3 P)**

b) Begründen Sie, dass der Grad der Funktion f mindestens drei ist. **(2 P)**

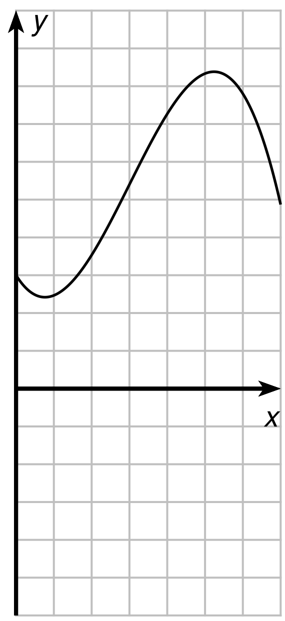


Abb. 1

Analysis 2 - Probeklausur 2014 (eA) — EH S. 21

Die Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f einer für $-1 \leq x \leq 3$ mit $x \in \mathbb{R}$ definierten Funktion f, die bei $x = -1$, $x = 1$ und $x = 3$ Nullstellen besitzt.
Die Funktion F mit $F(x) = -\frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3$ ist eine Stammfunktion von f.

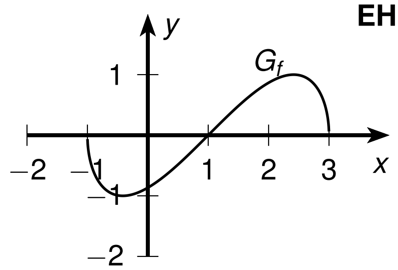


Abb. 2

a) Begründen Sie, dass die Funktion H mit $H(x) = -\frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3 + 1$ ebenfalls eine Stammfunktion von f ist. **(1 P)**

b) Begründen Sie, dass der Wert des Integrals $\int_0^3 f(x)\,dx$ nicht mit dem Inhalt der Fläche übereinstimmt, die für $0 \leq x \leq 3$ zwischen G_f und der x-Achse liegt. **(2 P)**

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die G_f im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt. **(2 P)**

---

*EH: Erwartungshorizont

Analysis 3 - Probeklausur 2014 (eA) **EH S. 22**

Die Abbildung 3 zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f.

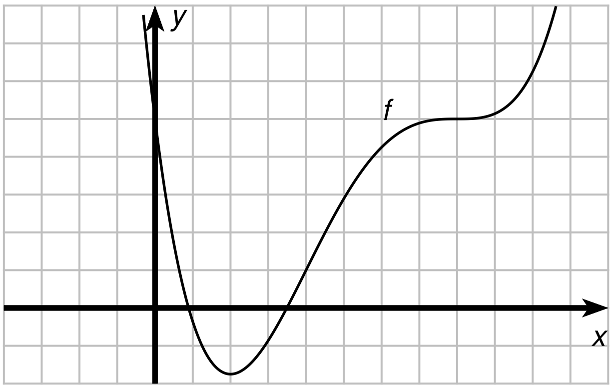


Abb. 3

a) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f. **(3 P)**

b) Begründen Sie, dass der Grad der Funktion mindestens vier ist. **(2 P)**

Analysis 4 - Abitur 2014 (gA) **EH S. 22**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x} - 1$, $\quad x \in \mathbb{R}$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f. **(2 P)**

b) Zeigen Sie, dass die Funktionsgleichung $t(x) = -e \cdot x - 1$ die Tangente an den Graphen von f bei $x = -1$ beschreibt. **(3 P)**

Analysis 5 - Abitur 2014 (eA) **EH S. 23**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot \left(2 \cdot x + x^2\right) \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f. **(2 P)**

b) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von f ist.
Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

(3 P)

Analysis 6 - Abitur 2014 (eA) **EH S. 23**

Für jeden Wert von a $(a \in \mathbb{R})$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = -x^2 + a \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Begründen Sie mithilfe der Lage des Graphen von f_1 im Koordinatensystem, dass $\int\limits_{-1}^{1} f_1(x)\ \mathrm{dx} > 0$ gilt. **(2 P)**

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int\limits_{-1}^{1} f_a(x)\ \mathrm{dx} = 0$ gilt. **(3 P)**

2.2 Analytische Geometrie

Analytische Geometrie 1 - Probeklausur 2014 (eA) **EH S. 24**

Gegeben sind die Punkte $A(-1|1|4)$, $B(-3|5|6)$ und $C_t(-2+t|3|5+t)$ mit $t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass jedes der Dreiecke ABC_t gleichschenklig ist. **(3 P)**

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die das jeweils zugehörige Dreieck ABC_t gleichseitig ist. **(2 P)**

Analytische Geometrie 2 - Probeklausur 2014 (eA) **EH S. 24**

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ und die Geraden

$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 3 \\ 2 \\ 1 + a \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$.

a) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Richtungsvektoren von g und h_a zueinander senkrecht sind. **(2 P)**

b) Weisen Sie nach, dass sich für $a = -2$ die Geraden g und h_a schneiden. **(3 P)**

Analytische Geometrie 3 - Abitur 2014 (eA) **EH S. 25**

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c_t} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von t mit $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ einen Körper auf. Die Abbildung 4 zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t.

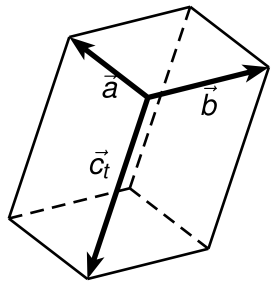


Abb. 4

a) Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind. **(2 P)**

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die der jeweils zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt. **(3 P)**

Analytische Geometrie 4 - Abitur 2014 (eA) **EH S. 25**

Die Abbildung 5 zeigt ein gerades Prisma $ABCDEF$ mit $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $D(0|0|4)$.

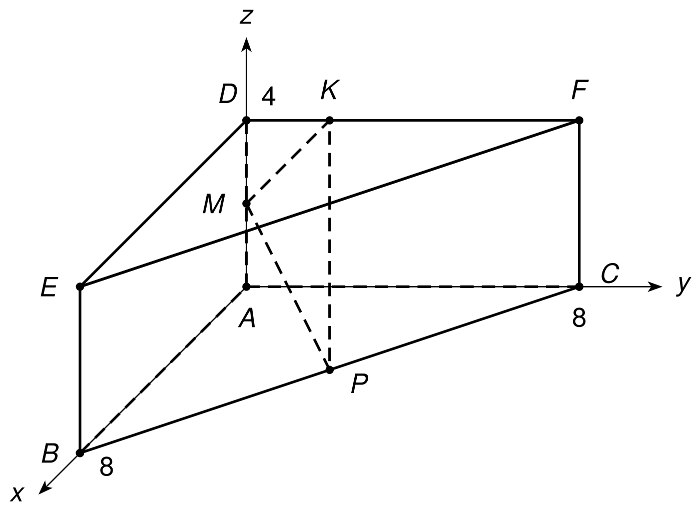


Abb. 5

a) Bestimmen Sie den Abstand der Eckpunkte B und F. **(2 P)**

b) Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$.
Der Punkt $K(0|y_K|4)$ liegt auf der Kante $\overline{DF}$.
Bestimmen Sie y_K so, dass das Dreieck KMP in M rechtwinklig ist. **(3 P)**

2.3 Lineare Algebra

Lineare Algebra 1 - Probeklausur 2014 (gA) **EH S. 26**

In einem System verteilt sich ein Gesamtbestand auf die Zustände A und B. Die Verteilung wird durch Zustandsvektoren $\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}$ beschrieben. Pro Zeiteinheit finden zwischen den Zuständen die in der Abbildung 6 dargestellten Übergänge statt.

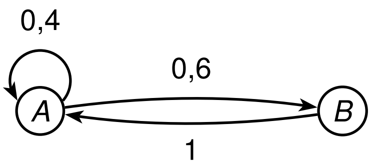


Abb. 6

a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix M an.

Bestimmen Sie die Matrix N, die die Übergänge in zwei aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten zusammenfassend beschreibt. **(3 P)**

b) Für große natürliche Zahlen n nähert sich die Potenz M^n der Matrix $G = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie mithilfe der Matrix G, dass sich für große natürliche Zahlen n der Startvektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ nicht (genauer gesagt: beliebig wenig) vom Bestandsvektor nach n Zeitschritten unterscheidet. **(2 P)**

Lineare Algebra 2 - Probeklausur 2014 (gA) **EH S. 26**

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem durch:

$$\begin{array}{lrrrl} \text{I:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ \text{II:} & & x_2 & -x_3 & = 0 \\ \text{III:} & & & 2x_3 & = 2 \end{array}$$

a) Bestätigen Sie, dass $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ eine Lösung dieses Gleichungssystems darstellt. **(2 P)**

Gegeben ist ein *anderes* lineares Gleichungssystem durch:

$$\begin{array}{lrrrl} \text{I:} & 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & = 13 \\ \text{II:} & -2x_1 & +2x_2 & & = -8 \\ \text{III:} & & x_2 & +x_3 & = 2 \end{array}$$

b) Zeigen Sie, dass dieses Gleichungssystem keine Lösung hat. **(3 P)**

Lineare Algebra 3 - Probeklausur 2014 (eA) **EH S. 27**

In einem System verteilt sich ein Gesamtbestand auf die Zustände A und B. Die Verteilung wird durch Zustandsvektoren $\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}$ beschrieben. Pro Zeiteinheit finden zwischen den Zuständen die in der Abbildung 7 dargestellten Übergänge statt.

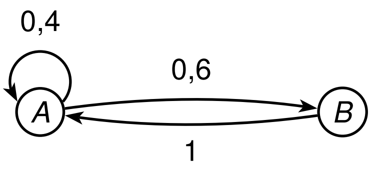


Abb. 7

a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix M an.

Bestimmen Sie die Matrix N, die die Übergänge in zwei aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten zusammenfassend beschreibt. **(3 P)**

b) Für große natürliche Zahlen n nähert sich die Potenz M^n der Matrix $G = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

Beschreiben Sie, welche Folgen sich daraus für die Verteilung des Gesamtbestandes auf die Zustände A und B ergeben. **(2 P)**

Lineare Algebra 4 - Probeklausur 2014 (eA) **EH S. 27**

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem durch:

$$\begin{array}{lrrrrrrr} \text{I:} & 2x_1 & +3 & x_2 & + & 5x_3 & = & 13 \\ \text{II:} & -2x_1 & +2 & x_2 & & & = & -8 \\ \text{III:} & & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat. **(3 P)**

b) Es gibt eine Zahl, durch die man die Zahl 2 auf der rechten Seite der dritten Gleichung ersetzen kann, sodass das geänderte Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Geben Sie diese Zahl an und begründen Sie Ihre Antwort. **(2 P)**

Lineare Algebra 5 - Abitur 2014 (gA) **EH S. 28**

Eine Firma produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2. Daraus werden in einem zweiten Produktionsschritt die Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt. Die nachfolgenden Tabellen zeigen, wie viele Mengeneinheiten (ME) in den jeweiligen Produktionsschritten zur Herstellung von je einer ME der Zwischen- bzw. Endprodukte verarbeitet werden:

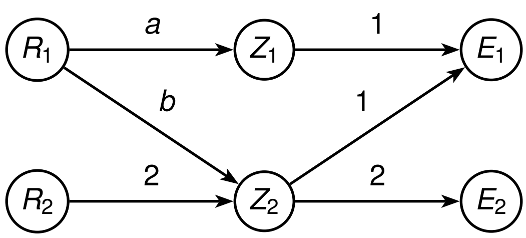
von / nach	Z_1	Z_2
R_1	2	1
R_2	0	2

von / nach	E_1	E_2
Z_1	1	0
Z_2	1	2

a) Ermitteln Sie den jeweiligen Rohstoffbedarf an R_1 und an R_2

- für 100 ME von E_1,
- für 100 ME von E_2 sowie
- für 50 ME von Z_2. **(3 P)**

Durch eine Änderung des Produktionsverfahrens ändert sich der Bedarf an Rohstoff R_1 so, dass der Produktionsprozess wie folgt dargestellt werden kann:



Es werden nun

- für jede ME von E_1 nur noch 2 ME von R_1 und
- für jede ME von E_2 nur noch 1 ME von R_1

benötigt.

b) Bestimmen Sie a und b. **(2 P)**

Lineare Algebra 6 - Abitur 2014 (eA) **EH S. 28**

Eine Firma produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2. Daraus werden in einem zweiten Produktionsschritt die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Nachfolgend ist angegeben, wie viele Mengeneinheiten (ME) in den jeweiligen Produktionsschritten zur Herstellung von je einer ME der Zwischen- bzw. Endprodukte verarbeitet werden:

nach \ von	Z_1	Z_2
R_1	2	6
R_2	4	4
R_3	6	2

nach \ von	E_1	E_2	E_3
Z_1	5	2	8
Z_2	5	8	2

a) Berechnen Sie, wie viele ME von R_3 insgesamt benötigt werden, um jeweils eine ME von E_1, E_2 und E_3 herzustellen. **(3 P)**

Aufgrund von Lieferschwierigkeiten kann die Firma für R_3 nur noch auf einen Lagerbestand von 40 ME zurückgreifen.

b) Berechnen Sie, wie viele ME von Zwischenprodukten noch produziert werden können, wenn Z_1 und Z_2 in der gleichen Anzahl von ME produziert werden müssen. **(2 P)**

Lineare Algebra 7 - Abitur 2014 (eA) **EH S. 29**

Gegeben sind die Matrix A mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{u}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das Produkt $A \cdot \vec{u}$.

Geben Sie zwei von $\vec{u}$ verschiedene Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ an, sodass gilt: $A \cdot \vec{u} = A \cdot \vec{v} = A \cdot \vec{w}$. **(3 P)**

b) Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ gilt: $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. **(2 P)**

2.4 Stochastik

Stochastik 1 - Probeklausur 2014 (gA) EH S. 29

Bei der Produktion von Halbleiterbauteilen eines bestimmten Typs ist im Mittel jedes fünfte Bauteil fehlerhaft. Jedes produzierte Bauteil wird abschließend einer Kontrolle unterzogen und dabei entweder als fehlerhaft oder als einwandfrei eingestuft. Im Rahmen der Kontrolle wird ein fehlerhaftes Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % als fehlerhaft eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einwandfreies Bauteil als fehlerhaft eingestuft wird, beträgt 40 %.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil einwandfrei ist und im Rahmen der Kontrolle korrekt eingestuft wurde. **(2 P)**

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil durch die Kontrolleure nicht korrekt eingestuft wurde. **(3 P)**

Stochastik 2 - Probeklausur 2014 (gA) EH S. 30

Ein Glücksrad ist in einen blauen, einen gelben und in einen roten Sektor unterteilt. Beim Drehen des Glücksrades tritt „Blau“ mit der Wahrscheinlichkeit $p$und „Rot“ mit der Wahrscheinlichkeit $2p$ ein.

a) Geben Sie zwei verschiedene mögliche Werte für p an. **(2 P)**

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Betrachtet wird das Ereignis E: Es tritt genau zweimal „Gelb“ ein.

Zeigen Sie, dass das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 9p^2 - 6p + 1$ eintritt.

(3 P)

Stochastik 3 - Probeklausur 2014 (eA) EH S. 30

Bei der Produktion von Halbleiterbauteilen eines bestimmten Typs ist im Mittel jedes fünfte Bauteil fehlerhaft. Jedes produzierte Bauteil wird abschließend einer Kontrolle unterzogen und dabei entweder als fehlerhaft oder als einwandfrei eingestuft. Im Rahmen der Kontrolle wird ein fehlerhaftes Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % als fehlerhaft eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einwandfreies Bauteil als fehlerhaft eingestuft wird, beträgt 40 %.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil einwandfrei ist *und* im Rahmen der Kontrolle als einwandfrei eingestuft wurde. **(2 P)**

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil fehlerhaft ist, wenn es im Rahmen der Kontrolle als einwandfrei eingestuft wurde. **(3 P)**

Stochastik 4 - Probeklausur 2014 (eA) EH S. 31

Ein Glücksrad ist in einen blauen, einen gelben und in einen roten Sektor unterteilt. Beim Drehen des Glücksrades tritt „Blau“ mit der Wahrscheinlichkeit p und „Rot“ mit der Wahrscheinlichkeit $2p$ ein.

a) Geben Sie an, welche Werte von p bei diesem Glücksrad möglich sind. **(2 P)**

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

Betrachtet wird das Ereignis E: Es tritt mindestens einmal „Rot“ ein.

Zeigen Sie, dass das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 4p - 4p^2$ eintritt. **(3 P)**

Stochastik 5 - Abitur 2014 (gA) EH S. 31

Von einer Wiesenblume gibt es zwei Varianten, eine weiß blühende und eine rot blühende. Erfahrungsgemäß bringen die Samen der weiß blühenden Variante zu 80 % wieder weiß blühende und zu 20 % rot blühende Blumen hervor, während die Samen der rot blühenden Variante zu 40 % weiß blühende und zu 60 % rot blühende Blumen hervorbringen.

a) Auf einer Wiese stehen zu 70 % weiß blühende und zu 30 % rot blühende Varianten dieser Blume.Bestimmen Sie den Anteil rot blühender Blumen, der von den Samen dieser Blumen erfahrungsgemäß zu erwarten ist. **(2 P)**

b) Ein Samenlieferant möchte eine Mischung von Samen der beiden Varianten herstellen, die zu 50 % weiß blühende und zu 50 % rot blühende Blumen erwarten lässt.Ermitteln Sie den Anteil der Samen von der weiß blühenden Variante, den er dieser Mischung beigeben muss. **(3 P)**

Stochastik 6 - Abitur 2014 (eA) **EH S. 31**

In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln.

Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:

> Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

a) Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an. **(2 P)**

Betrachtet wird das Ereignis E: Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.

b) Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

(3 P)

Stochastik 7 - Abitur 2014 (eA) **EH S. 32**

Die Flächen zweier Würfel 1 und 2 sind mit jeweils einem Buchstaben beschriftet.

Würfel 1: B, B, C, C, C, C

Würfel 2: A, A, A, B, B, C

Für jeden der beiden Würfel wird angenommen, dass jede der Flächen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird.

a) Würfel 1 wird zweimal geworfen. Eine Zufallsgröße beschreibt, wie oft dabei eine Fläche mit dem Buchstaben B gewürfelt wird.

Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgröße. **(2 P)**

b) Einer der beiden Würfel wird zufällig ausgewählt und einmal geworfen; es wird eine Fläche mit dem Buchstaben C gewürfelt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei der Würfel 2 geworfen wurde.
(3 P)

3 Muster- und Beispielaufgaben für den Aufgabenpool 2

3.1 Analysis

Analysis 1 - Probeklausur 2014 (gA) **EH S. 32**

Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = -6x^2 + 12x + 18,\ x \in \mathbb{R}$.
Die Abbildung 8 zeigt den Graphen von f, der durch die Punkte $H(1|24)$ und $N(3|0)$ verläuft.

a) Zeigen Sie, dass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 22$ gilt. **(2 P)**

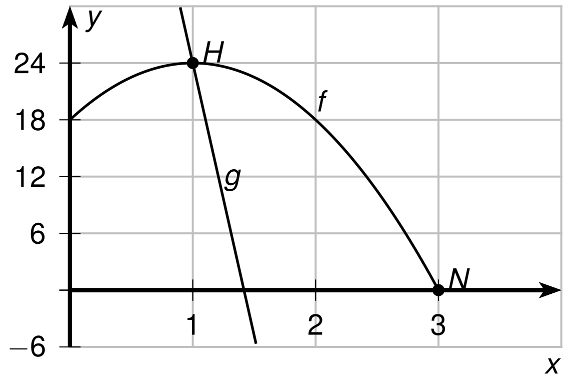


Abb. 8

b) Die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, hat den Inhalt 54. Eine Gerade g verläuft durch den Punkt H und hat die Steigung $m = -57{,}6$.

Zeigen Sie, dass die Gerade g die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, in zwei Teilflächen gleichen Inhalts teilt. **(3 P)**

Analysis 2 - Probeklausur 2014 (eA) **EH S. 32**

Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = -6x^2 + 12x + 18,\ x \in \mathbb{R}$.
Die Abbildung 9 zeigt den Graphen von f, der durch die Punkte $H(1|24)$ und $N(3|0)$ verläuft.

a) Zeigen Sie, dass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 22$ gilt. **(2 P)**

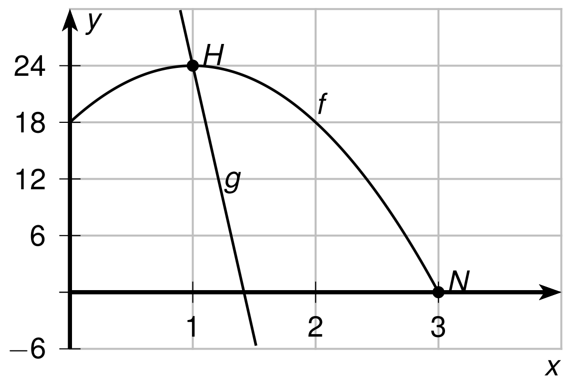


Abb. 9

b) Die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, hat den Inhalt 54. Eine Gerade g, die durch den Punkt H verläuft, teilt diese Fläche in zwei Teilflächen gleichen Inhalts.

Bestimmen Sie rechnerisch die Stelle, an der die Gerade g die x-Achse schneidet. **(3 P)**

Analysis 3 - Abitur 2014 (gA) **EH S. 33**

Die Abbildung 10 zeigt den Graphen einer Funktion f. Mit x_1 bis x_6 sind diejenigen Stellen gekennzeichnet, an denen der Graph von f besondere Punkte hat (Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte).

a) Die Funktion F sei eine Stammfunktion der Funktion f.

Begründen Sie, dass der Graph von F im dargestellten Bereich genau einen Tiefpunkt hat. **(2 P)**

b) Skizzieren Sie in die Darstellung hinein schematisch den Graphen der ersten Ableitung f'. **(3 P)**

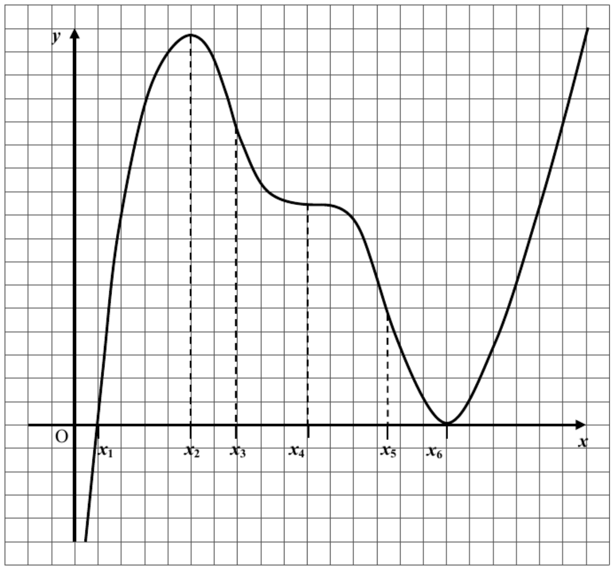


Abb. 10

Analysis 4 - Abitur 2014 (eA) **EH S. 33**

Die Abbildung 11 zeigt den Graphen einer Funktion f.

a) Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f. **(2 P)**

b) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich. **(3 P)**

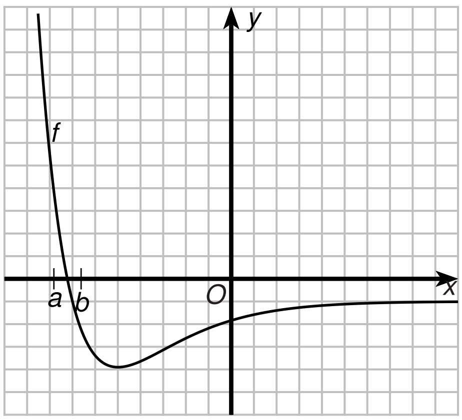


Abb. 11

3.2 Analytische Geometrie

Analytische Geometrie 1 - Probeklausur 2014 (eA) **EH S. 34**

Gegeben ist die Raute $ABCD$ mit $A(0|2|0)$, $B(4|7|0)$, $C(0|12|0)$ und $D(-4|7|0)$ (vgl. Abbildung 12).
Jeder Eckpunkt der Raute entsteht durch Verschiebung eines Eckpunkts des Quadrats $EFGH$ senkrecht zur x_1x_2-Ebene; dabei geht der Punkt A aus dem Punkt $E(0|2|8)$ sowie der Punkt C aus dem Punkt $G(0|12|8)$ hervor (vgl. Abbildung 12).

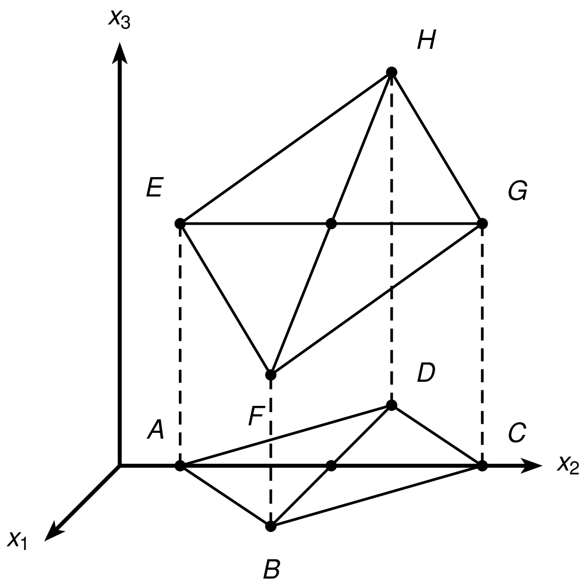


Abb. 12

a) Geben Sie die x_1-Koordinate und die x_2-Koordinate des Punktes F an. **(1 P)**

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte F und H. **(4 P)**

Analytische Geometrie 2 - Abitur 2014 (eA) **EH S. 35**

Gegeben ist die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$.

a) Es existiert ein Wert von $a \quad (a \in \mathbb{R})$, für den sich die Geraden g und

$h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$ schneiden.

Bestimmen Sie diesen Wert von a. **(3 P)**

b) Eine Gerade k schneidet die Gerade g in einem Punkt S.

Ein Punkt R auf der Geraden g und ein Punkt T auf der Geraden k sollen mit dem Punkt S ein gleichschenkliges Dreieck mit vorgegebenem Flächeninhalt bilden.

Begründen Sie, dass die Längen der Dreiecksseiten nicht eindeutig festgelegt sind, wenn sich die Geraden g und k nicht rechtwinklig schneiden. **(2 P)**

3.3 Lineare Algebra

Lineare Algebra 1 - Probeklausur 2014 (eA) **EH S. 35**

Die Entwicklung eines Systems kann modelliert werden, indem aus dem Zustandsvektor $\vec{x}_i$ durch Multiplikation mit einer Übergangsmatrix der Zustandsvektor des folgenden Zustands $\vec{x}_{i+1}$ bestimmt wird ($i \in \mathbb{N}$).

a) Gegeben ist ein System mit einer Übergangsmatrix M der Form $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $a \cdot b \cdot c = 1$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

Weisen Sie nach, dass sich für jeden beliebigen Zustandsvektor des Systems nach endlich vielen Entwicklungsschritten wieder der gleiche Zustandsvektor ergibt. **(3 P)**

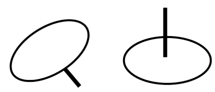
b) Für die Übergangsmatrix L eines anderen Systems gilt $L^n = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R},\ k > 1$ und $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.

Erläutern Sie für dieses andere System den Zusammenhang zwischen einem beliebigen Zustandsvektor $\vec{x}_0$ und dem Zustandsvektor $\vec{x}_n$, der sich aus $\vec{x}_0$ nach n Übergängen ergibt. **(2 P)**

3.4 Stochastik

Stochastik 1 - Probeklausur 2014 (eA) **EH S. 36**

Beim Werfen einer Reißzwecke kann diese entweder auf der Seite oder auf dem Kopf liegen bleiben (siehe Abbildung). Eine Reißzwecke wird zweimal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie dabei mindestens einmal auf der Seite liegen bleibt, beträgt 0,84. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei den zwei Würfen genau einmal auf dem Kopf liegen bleibt. **(5 P)**



Stochastik 2 - Abitur 2014 (eA) **EH S. 36**

Die binomialverteilten Zufallsgrößen X_1 und X_2 geben für Trefferwahrscheinlichkeiten von $p_1 = 0{,}8$ bzw. $p_2 = 0{,}2$ jeweils die Anzahl der Treffer bei fünf Versuchen an.

a) Betrachtet wird die Zufallsgröße X_1.

Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer berechnet werden kann. **(1 P)**

b) Geben Sie für eine der beiden Zufallsgrößen ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $1 - \left(\binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + \binom{5}{5} \cdot 0{,}8^5 \right)$ angegeben wird.

(2 P)

c) Abbildung 13 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_2 in Abbildung 14 dar.

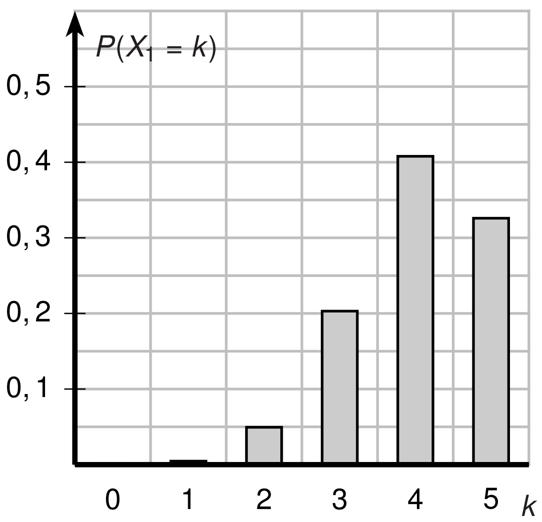


Abb. 13

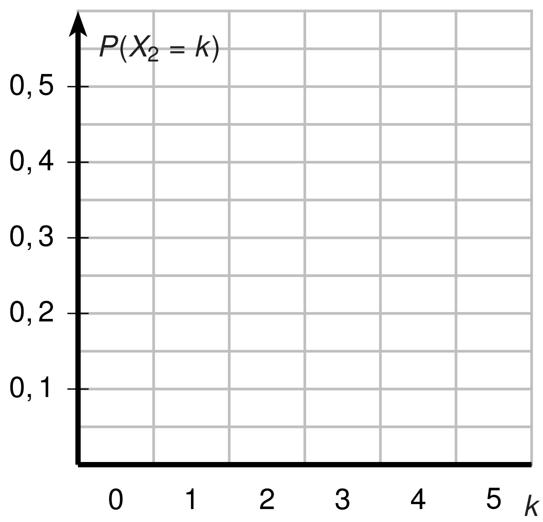


Abb. 14

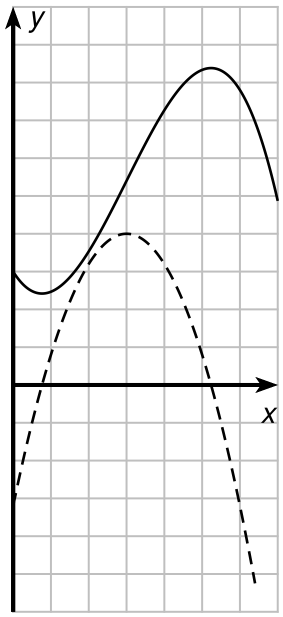
(2 P)

4 Erwartungshorizonte

4.1 Aufgabenpool 1

4.1.1 Analysis

Analysis 1 - Probeklausur 2014 (gA)

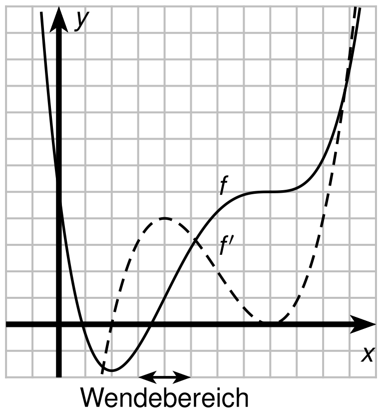
	Lösungsskizze
a)	Hinweise: Für die volle Punktzahl soll der Graph der ersten Ableitung • die Schnitte mit der x-Achse in guter Genauigkeit und • eine Maximalstelle in der Nähe der Wendestelle von *f* besitzen. Die Höhe des lokalen Maximums braucht nicht mit der Lösungsskizze übereinzustimmen. Punktabzug ist vorzunehmen für • deutliche Ecken oder Unstetigkeiten im skizzierten Graphen, • falsche Vorzeichen der ersten Ableitung oder • sonstige offensichtliche Unstimmigkeiten. 
b)	*Verschiedene Begründungen sind möglich, zum Beispiel:* Der Grad ist mindestens drei, weil • es einen Wendepunkt gibt. • es zwei Extrempunkte gibt. *Mindestens eine der obigen Begründungen (oder eine andere korrekte) muss angegeben werden.*

Analysis 2 - Probeklausur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Es gilt $H(x) = F(x) + 1$ und damit ist $H'(x) = F'(x) = f(x)$.

	Lösungsskizze
b)	Der Wert des Integrals stimmt nicht mit dem Inhalt der Fläche überein, da f im Intervall $[0; 3]$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt.
c)	Es ist $\int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1) = 0 - \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Analysis 3 - Probeklausur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Die Abbildung sieht man rechts. Für die volle Punktzahl soll der Graph der ersten Ableitung • den ersten dargestellten Schnitt mit der x-Achse in guter Genauigkeit, • die Berührung mit der x-Achse ungefähr und • ein lokales Maximum in dem markierten „Wendebereich“  besitzen. Die Höhe des lokalen Maximums braucht nicht mit der Lösungsskizze übereinzustimmen. Punktabzug ist vorzunehmen für • deutliche Ecken oder Unstetigkeiten im skizzierten Graphen, • falsche Vorzeichen der ersten Ableitung oder • sonstige offensichtliche Unstimmigkeiten.
b)	Die Funktion f hat zwei Stellen, an denen die zweite Ableitung gleich null ist. Die Funktionsgleichung der zweiten Ableitung muss also mindestens zweiten Grades sein. Daher muss f eine Funktion mindestens vierten Grades sein. *Andere schlüssige Argumentationen sind ebenfalls als korrekt zu bewerten.*

Analysis 4 - Abitur 2014 (gA)

	Lösungsskizze
a)	Es ist $e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Die einzige Nullstelle ist $x = 0$.

	Lösungsskizze
b)	Die Funktion f hat an der Stelle den Funktionswert $f(-1) = e^1 - 1 = e - 1$. Der y-Wert der Geraden ist $t(-1) = -e \cdot (-1) - 1 = e - 1$. Also ist $f(-1) = t(-1)$. Die Steigung der Funktion f ist gegeben durch $f'(x) = -e^{-x}$; $f'(-1) = -e^1 = -e$. Der Steigungsfaktor der Geraden ist ebenfalls gleich $-e$. Da der Graph der Funktion und die Gerade bei $x = -1$ den gleichen y-Wert und die gleiche Steigung haben, ist die Gerade eine Tangente an den Graphen der Funktion.

Analysis 5 - Abitur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Da $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, werden die Nullstellen der Funktion durch folgenden Ansatz berechnet: $2 \cdot x + x^2 = 0 \quad x \cdot (2 + x) = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ *Hinweis: Das Fehlen eines Hinweises auf $e^x \neq 0$ führt zum Abzug von 1 BE.*
b)	Damit F eine Stammfunktion von f ist, muss gelten: $F'(x) = f(x)$ Mithilfe der Produktregel ergibt sich: $F'(x) = 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot \left(2 \cdot x + x^2\right) = f(x)$ Somit ist F eine Stammfunktion von f. Es ist $G(x) = x^2 \cdot e^x + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$. Damit ist $x^2 \cdot e^x + c = 2e$ für $x = 1$ zu lösen. Für $c = e$ ergibt sich die gewünschte Bedingung.

Analysis 6 - Abitur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Beim Graphen der Funktion f_1 handelt es sich um eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(0\|1)$. Diese Funktion hat ihre Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Damit liegt der Graph der Funktion in dem Intervall $[-1;1]$ oberhalb der y-Achse und das Integral $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{dx}$ ist positiv.
b)	Es ist $\int\limits_{-1}^{1} f_a(x)\ \mathrm{dx} = \int\limits_{-1}^{1} (-x^2 + a)\ \mathrm{dx} = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax\right]_{-1}^{1} = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax\right]_{0}^{1} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} + a\right)$ Dann muss $a = \frac{1}{3}$ sein, damit die Bedingung erfüllt ist.

4.1.2 Analytische Geometrie

Analytische Geometrie 1 - Probeklausur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Es ist $\overrightarrow{AC_t} = \begin{pmatrix} -1+t \\ 2 \\ 1+t \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC_t} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -2 \\ -1+t \end{pmatrix}$, beide Vektoren haben gleiche Komponenten, nur in verschiedener Reihenfolge, also ist $\left\lvert\overrightarrow{AC_t}\right\rvert = \left\lvert\overrightarrow{BC_t}\right\rvert$
b)	Es ist $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \sqrt{24}$, d.h. $\begin{aligned} \left\lvert\overrightarrow{AC_t}\right\rvert &= \sqrt{24} \\ \sqrt{(-1+t)^2+2^2+(1+t)^2} &= \sqrt{24} \\ 1-2t+t^2+4+1^2+2t+t^2 &= 24 \\ 2t^2+6 &= 24 \\ 2t^2 &= 18 \\ t &= \pm 3 \end{aligned}$ Für $t = \pm 3$ ist das Dreieck ABC_t gleichseitig.

Analytische Geometrie 2 - Probeklausur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren ist: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot a+3 \\ 2 \\ 1+a \end{pmatrix} = 10a+15+4-1-a = 9a+18$ Die Richtungsvektoren sind senkrecht zueinander für $9a+18=0$ bzw. $a=-2$. Somit stehen g und h_{-2} zueinander senkrecht.

	Lösungsskizze
b)	Die Schnittgleichung für g und h_{-2} lautet: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ also ergeben sich die drei Gleichungen: $\begin{array}{rrl} \text{I)} & 5 \cdot t + s & = 3 \\ \text{II)} & 2 \cdot t - 2 \cdot s & = 6 \\ \text{III)} & -t + s & = -3 \end{array}$ Aus III) erhält man $s = -3 + t$. Einsetzen in II) ergibt $2t - 2 \cdot (-3 + t) = 6 \quad (w)$ und in I) einsetzen erhält man $5t - 3 + t = 3$, also $t = 1$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt, dass g und h_{-2} sich schneiden.

Analytische Geometrie 3 - Abitur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Es ergeben sich $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2+2+0 = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c_t} = 8t+2t-10t = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{c_t} = -4t+4t+0 = 0$. Somit wird ein Quader aufgespannt.
b)	Es ist t zu bestimmen mit $\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \lvert\vec{c_t}\rvert = 15$. Also $\begin{array}{rl} \sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+4} \cdot \sqrt{16t^2+4t^2+25t^2} & = 15 \\ 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{45} \cdot \lvert t\rvert & = 15 \\ 3 \cdot \sqrt{225} \cdot \lvert t\rvert & = 15 \\ t & \pm\frac{1}{3} \end{array}$

Analytische Geometrie 4 - Abitur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Es gilt $B(8\|0\|0)$ und $F(0\|8\|4)$ und damit ist $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$. Also ergibt sich $\overline{\lvert BF\rvert} = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12$.

	Lösungsskizze
b)	Es gilt $M(0\|0\|2)$ und $P(4\|4\|0)$. Damit ist $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{MK} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_K \\ 2 \end{pmatrix}$. Also ist $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MK} = 0 + 4y_K - 4 = 0$. Daraus ergibt sich $y_K = 1$. Der Punkt $K(0\|1\|4)$ erfüllt damit die geforderten Bedingungen.

4.1.3 Lineare Algebra

Lineare Algebra 1 - Probeklausur 2014 (gA)

	Lösungsskizze
a)	Aus dem Übergangsgraphen ergibt sich $M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$ Es ist $N = M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4^2 + 1 \cdot 0{,}6 & 0{,}4 \cdot 1 \\ 0{,}6 \cdot 0{,}4 & 0{,}6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}4 \\ 0{,}24 & 0{,}6 \end{pmatrix}$
b)	Sei $\vec{v}_n$ der Bestandsvektor nach n Zeitschritten. Dann gilt: $\vec{v}_n = G \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \cdot 10 + \frac{5}{8} \cdot 6 \\ \frac{3}{8} \cdot 10 + \frac{3}{8} \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{8} + \frac{30}{8} \\ \frac{30}{8} + \frac{18}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{8} \\ \frac{48}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{v}_0$ Damit ist das zu Zeigende gezeigt.

Lineare Algebra 2 - Probeklausur 2014 (gA)

	Lösungsskizze
a)	Durch Einsetzen des Lösungsvorschlags ergeben sich wahre Aussagen: $\begin{array}{llllll} \text{I:} & 1 & +1 & +1 & = 3 \\ \text{II:} & & 1 & -1 & = 0 \\ \text{III:} & & & 2 \cdot 1 & = 2 \end{array}$ Damit ist bestätigt, dass der Lösungsvorschlag eine Lösung darstellt. *Alternativ kann man die Lösung durch Rückwärtseinsetzen berechnen.*

	Lösungsskizze
b)	Mit dem Gauß-Verfahren kommt man auf die folgende Stufenform: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ -2 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$ $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ Das Gleichungssystem enthält somit einen Widerspruch, $L = \{\}$.

Lineare Algebra 3 - Probeklausur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Aus dem Übergangsgraphen ergibt sich $M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$ Es ist $N = M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4^2 + 1 \cdot 0{,}6 & 0{,}4 \cdot 1 \\ 0{,}6 \cdot 0{,}4 & 0{,}6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}4 \\ 0{,}24 & 0{,}6 \end{pmatrix}$
b)	Langfristig werden sich die Bestände zu $\frac{5}{8}$ auf A und $\frac{3}{8}$ auf B verteilen. *Alternativformulierung: Die Bestände werden sich auf A und B im Verhältnis* 5 : 3 *verteilen.* *Gemäß dem Operator „Beschreiben" ist die Darstellung eines Lösungsweges nicht gefordert, sie kann aber bei fehlendem Ergebnis zur Vergabe einer Bewertungseinheit führen.*

Lineare Algebra 4 - Probeklausur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Mit dem Gauß-Verfahren kommt man auf die folgende Stufenform: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ -2 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$ $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ Das Gleichungssystem enthält somit einen Widerspruch, $L = \{\}$.

	Lösungsskizze
b)	In der dritten Zeile werde die 2 durch eine 1 ersetzt, dann ergeben die Umformungen die Matrix $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, die ein unterbestimmtes Gleichungssystem beschreibt.

Lineare Algebra 5 - Abitur 2014 (gA)

	Lösungsskizze
a)	100 ME von E_1: $2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$; es werden 300 ME von R_1 benötigt. $2 \cdot 1 = 2$; es werden 200 ME von R_2 benötigt. 100 ME von E_2: $1 \cdot 2 = 2$; es werden 200 ME von R_1 benötigt. $2 \cdot 2 = 4$; es werden 400 ME von R_2 benötigt. 50 ME von Z_2: Es werden 50 ME von R_1 und 100 ME von R_2 benötigt. *Hinweis: Die Lösungswege können auch anders dargestellt werden.*
b)	Die angegebenen Rohstoffmengen ergeben die Gleichungen $I: a \cdot 1 + b \cdot 1 = 2$ und $II: b \cdot 2 = 1$. Die Lösungen sind $a = 1{,}5$ und $b = 0{,}5$.

Lineare Algebra 6 - Abitur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Mit den Matrizen A bzw. B lässt sich die Verflechtung der Rohstoffe mit den Zwischenprodukten bzw. die Verflechtung der Zwischenprodukte mit den Endprodukten beschreiben. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; $A \cdot B = P = \begin{pmatrix} ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ 40 & 28 & 52 \end{pmatrix}$ Die Produktmatrix P beschreibt die Verflechtung von Rohstoffen und Endprodukten. Die Summe der Elemente in der dritten Zeile beschreibt den Bedarf an Rohstoffen R_3 für eine Produktion von je einer ME der Endprodukte: $40 + 28 + 52 = 120$. *Hinweise: Im Rahmen der Aufgabenstellung ist lediglich die letzte Zeile der Rohstoff/Endproduktmatrix von Interesse. Fehler in den ersten beiden Zeilen führen insgesamt zu maximal 1P Abzug von den ansonsten in Teil a) erzielten Punkten. Alternative Ansätze, z.B. eine direkte Berechnung, sind denkbar.*

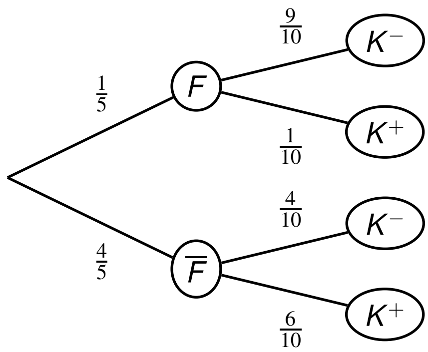
	Lösungsskizze
b)	Bei der Produktion von Z_1 und Z_2 in gleichen ME werden $6 \cdot x + 2 \cdot x$ ME von R_3 benötigt. Aus $6 \cdot x + 2 \cdot x = 40$ folgt $x = 5$, d. h. es lassen sich noch je 5 ME der jeweiligen Zwischenprodukte produzieren.

Lineare Algebra 7 - Abitur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Berechnung des Produktes: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ Es müssen zwei Vektoren der Form $\begin{pmatrix} k \\ -k \\ 2 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{R},\ k \neq 2)$ genannt werden.
b)	Es ist $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ 4-k \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+4-k \\ k+4-k \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

4.1.4 Stochastik

Stochastik 1 - Probeklausur 2014 (gA)

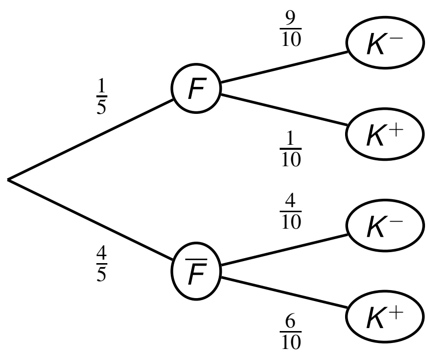
	Lösungsskizze
a)	Dies kann zum Beispiel mithilfe eines Baumdiagrammes gelöst werden. Dabei gilt:  F: Bauteil ist fehlerhaft. $\overline{F}$: Bauteil ist nicht fehlerhaft. K^-: Bauteil wird bei Kontrolle als fehlerhaft eingestuft. K^+: Bauteil wird bei Kontrolle als nicht fehlerhaft eingestuft. Es ergibt sich somit $P\left(\overline{F} \cap K^+\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$. *Bei der Lösung mithilfe des Baumdiagramms kann auf einen Eintrag der bedingten Wahrscheinlichkeiten nach F verzichtet werden. Die anderen Zweigwahrscheinlichkeiten sind für einen vollständig dargestellten Lösungsweg erforderlich.* *Das Baumdiagramm ist nicht erforderlich. Es kann stattdessen auch damit argumentiert werden, dass $P\left(\overline{F}\right) = 0{,}8$ und $P\left(K^+ \middle| \overline{F}\right) = 0{,}6$ gilt.* *Alternativ ist auch eine Lösung mithilfe einer Vierfeldertafel möglich.*

	Lösungsskizze
b)	Mithilfe des Baumdiagramms aus Aufgabenteil a) ergibt sich das Folgende: P(Kontrolleure haben das Bauteil nicht korrekt eingestuft) = $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{17}{50}$

Stochastik 2 - Probeklausur 2014 (gA)

	Lösungsskizze
a)	Alle Werte p, für die gilt $0 < p < \frac{1}{3}$, sind möglich. Eine zulässige Lösung ist z. B. die folgende: $p = 0{,}1$ oder $p = \frac{1}{4}$
b)	Die Wahrscheinlichkeit für „Gelb" ergibt sich aus den Wahrscheinlichkeiten für „Rot" und „Blau" wie folgt: $P(\text{Gelb}) = 1 - p - 2p = 1 - 3p$ Damit gilt: $P(E) = (1-3p)^2 = 1 - 6p + 9p^2 = 9p^2 - 6p + 1$

Stochastik 3 - Probeklausur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Dies kann zum Beispiel mithilfe eines Baumdiagrammes gelöst werden. Dabei gilt: F: Bauteil ist fehlerhaft. $\overline{F}$: Bauteil ist nicht fehlerhaft. K^-: Bauteil wird bei Kontrolle als fehlerhaft eingestuft. K^+: Bauteil wird bei Kontrolle als nicht fehlerhaft eingestuft.  Es ergibt sich somit $P\left(\overline{F} \cap K^+\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$. *Bei der Lösung mithilfe des Baumdiagramms kann auf einen Eintrag der bedingten Wahrscheinlichkeiten nach F verzichtet werden. Die anderen Zweigwahrscheinlichkeiten sind für einen vollständig dargestellten Lösungsweg erforderlich.* *Das Baumdiagramm ist nicht erforderlich. Es kann stattdessen auch damit argumentiert werden, dass $P\left(\overline{F}\right) = 0{,}8$ und $P\left(K^+ \middle\vert \overline{F}\right) = 0{,}6$ gilt.* *Alternativ ist auch eine Lösung mithilfe einer Vierfeldertafel möglich.*
b)	Es ist $P(F \mid K^+) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}6} = 0{,}04$. *Auch eine Lösung mithilfe einer Vierfeldertafel ist möglich. Es ergibt sich dann:* $P(F \mid K^+) = \frac{2}{50} = 0{,}04$.

Stochastik 4 - Probeklausur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Es ist $0 < p < \frac{1}{3}$.
b)	Mit den Abkürzungen. R: In einer Drehung tritt „Rot“ auf. $\overline{R}$: In einer Drehung tritt nicht „Rot“ auf. gilt: Für eine Drehung ist $P\left(\overline{R}\right) = 1 - 2p$. Daraus folgt: $P(E) = 1 - P\left(\overline{R}\overline{R}\right) = 1 - (1-2p)^2 = 1 - \left(1 - 4p + 4p^2\right) = 4p - 4p^2$. *Alternativlösung:* $P(E) \quad = P(RR) + P\left(R\overline{R}\right) + P\left(\overline{R}R\right) \quad = 2p \cdot 2p + 2p \cdot (1-2p) + (1-2p) \cdot 2p$ $= 4p^2 + 2p - 4p^2 + 2p - 4p^2$ *Weitere Alternativen, z. B. solche, bei denen anstelle von $P\left(\overline{R}\right)$ die Wahrscheinlichkeiten $P(B) = p$ und $P(G) = 1 - 3p$ Verwendung finden, sind ebenfalls möglich. Dabei stehen B und G für das Auftreten der Farben blau und gelb.*

Stochastik 5 - Abitur 2014 (gA)

	Lösungsskizze
a)	$0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}32$ Es ist zu erwarten, dass die Samen zu 32 % rot blühende Blumen hervorbringen.
b)	*Mögliche Lösung:* Für den Anteil a der Samen von der weiß blühenden Variante muss gelten: $a \cdot 0{,}8 + (1-a) \cdot 0{,}4 = 0{,}5$ Die Auflösung nach a ergibt $a = 0{,}25$. Er muss der Mischung zu einem Viertel Samen der weiß blühenden Variante beigeben.

Stochastik 6 - Abitur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	*rrwww*; *rrrww*; *rwwww*
b)	Es ist $P(E) = P(ww) + P(rr) = \frac{3}{10} + \frac{4}{15} = \frac{17}{30}$ Aussage: E ist wahrscheinlicher als sein Gegenereignis, da $P(\overline{E}) = 1 - \frac{17}{30} = \frac{13}{30}$. *Hinweis: Natürlich kann als Begründung auch $\frac{17}{30} > \frac{1}{2}$ genannt werden.*

Stochastik 7 - Abitur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Ansatz für Erwartungswert: x_i: 0, 1, 2 $P(X = x_i)$: $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$ Damit ist $P(B) = 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$.
b)	Es ist $P_C(2) = \frac{P(2) \cdot P_2(C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}$

4.2 Aufgabenpool 2

4.2.1 Analysis

Analysis 1 - Probeklausur 2014 (gA)

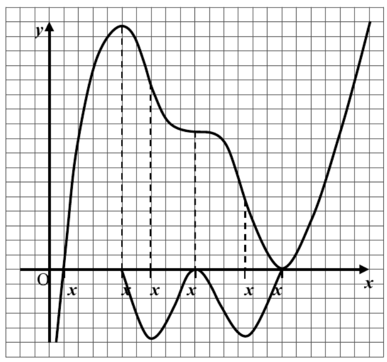
	Lösungsskizze
a)	Es gilt $A = \int_0^1 (-6x^2 + 12x + 18)\ \mathrm{dx} = \left[-2x^3 + 6x^2 + 18x\right]_0^1 = -2 + 6 + 18 - 0 = 22$
b)	Sei $1 + a$ die Schnittstelle der Geraden mit der x-Achse. Dann gilt: $-57{,}6 = -\frac{24}{a} \Leftrightarrow a = \frac{24}{57{,}6} \Leftrightarrow a = \frac{5}{12}$ Für den Flächeninhalt $A_{Dreieck}$ des rechtwinkligen Dreiecks, welches aus der Geraden g, der Geraden $x = 1$ und der x-Achse gebildet wird, gilt dann: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} \cdot 24 = 5$ Damit ergibt sich für den Flächeninhalt A_{links} der linken Teilfläche: $A_{links} = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{dx} + 5 = 22 + 5 = 27 = \frac{1}{2} \cdot 54$ Somit ist das zu Zeigende gezeigt.

Analysis 2 - Probeklausur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Es gilt $A = \int_0^1 (-6x^2 + 12x + 18)\ \mathrm{dx} = \left[-2x^3 + 6x^2 + 18x\right]_0^1 = -2 + 6 + 18 - 0 = 22$

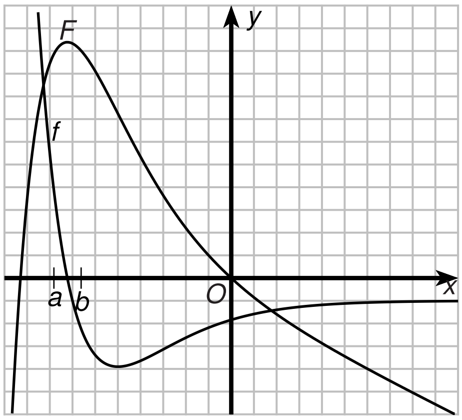
	Lösungsskizze
b)	Die gesuchte Gerade g, die Gerade $x = 1$ und die x-Achse bilden ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{Dreieck}$. Es soll gelten: $A_{Dreieck} + \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{dx}$, also muss $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot a + 22 = 27$ sein, wobei a die Breite des Dreiecks ist. Es ergibt sich damit $a = \frac{5}{12}$. Für die Schnittstelle x_s der Geraden g mit der x-Achse gilt dann: $x_s = 1 + a = 1\frac{5}{12} \approx 1{,}42$

Analysis 3 - Abitur 2014 (gA)

	Lösungsskizze
a)	*Mögliche Lösung*: *Hinweise:* Zur Erreichung der vollen Anzahl der BE muss der skizzierte Graph folgende Eigenschaften aufweisen: 1. Für $x_2 < x < x_6 \wedge x \neq x_4$ muss der skizzierte Graph unterhalb der x-Achse liegen. 2. Bei $x = x_2$ und $x = x_6$ muss der skizzierte Graph einen Punkt auf der x-Achse und eine Steigung ungleich 0 haben. 3. Bei $x = x_3$, $x = x_4$ und $x = x_5$ muss die Richtung des skizzierten Graphen parallel zur x-Achse sein.  Da die Achsen nicht skaliert sind, wird nicht erwartet, dass der Prüfling die von Null verschiedenen Steigungswerte des Graphen von f in Funktionswerte von f' übersetzt. Insbesondere soll für die Punktvergabe die Größenbeziehung zwischen den beiden Werten $f'(x_3)$ und $f'(x_5)$ keine Rolle spielen. *Falls der Prüfling über den Bereich* $[x_2; x_6]$ *hinaus skizziert, sind keine zusätzlichen BE zu vergeben, wohl aber können Fehler außerhalb des Bereichs* $[x_2; x_6]$ *zu einem Verlust von maximal einer der in b) erzielten BE führen.*

Analysis 4 - Abitur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	*Mögliche Beschreibung*: • links von der Nullstelle von f verläuft der Graph der Stammfunktion monoton wachsend • rechts von der Nullstelle von f verläuft der Graph der Stammfunktion monoton fallend

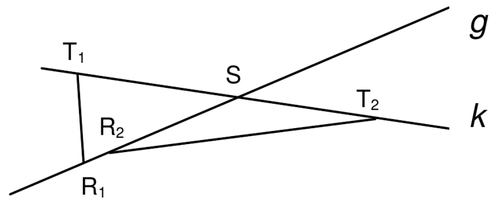
	Lösungsskizze
b)	*Für das Erreichen der vollen Anzahl an BE muss der skizzierte Graph* • einen Hochpunkt im Intervall $[a;b]$ enthalten • einen Wendepunkt von Rechts- nach Linkskrümmung ungefähr an der Stelle, an der der Graph von f seinen Tiefpunkt hat, besitzen • frei von weiteren Extrem- oder Wendepunkten sein. Der Graph ist rechts zu sehen. 

4.2.2 Analytische Geometrie

Analytische Geometrie 1 - Probeklausur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Es ist $x_1 = 4$ und $x_2 = 7$.
b)	Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ die x_3-Koordinate von F. Dann ist $\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 8-\lambda \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 8-\lambda \end{pmatrix}$ Es gilt dann: $\begin{aligned} \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 8-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 8-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (8-\lambda)^2 - 9 &= 0 \\ \lambda^2 - 16\lambda + 55 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 8 \pm \sqrt{64-55} \\ \lambda_{1,2} &= 8 \pm 3 \end{aligned}$ Damit ist $F\,(4\|7\|5)$ und $H\,(-4\|7\|11)$

Analytische Geometrie 2 - Abitur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Damit sich die beiden Geraden schneiden, muss gelten $g = h_a$, also $\begin{array}{rll} \text{(I)} & -3-r & = 4+5s \\ \text{(II)} & 6+r & = 3-3s \\ \text{(III)} & -4+3r & = a+s \end{array}$ Mit (I) + (II) erhält man $3 = 7+2s$ und damit $s = -2$. Einsetzen in (II) liefert $r = 3$. Mit (III) erhält man $5 = a-2$ und damit $a = 7$
b)	Eine mögliche Antwort: Wenn die Geraden nicht senkrecht zueinander sind, gibt es bei S zwei verschiedene Winkel, die beide als Scheitelwinkel des Dreiecks in Frage kommen und zu unterschiedlichen Seitenlängen führen. 

4.2.3 Lineare Algebra

Lineare Algebra 1 - Probeklausur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Es ist $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Also ist $M^3 \cdot \vec{x} = \vec{x}$. *Hinweis: Wenn mit einem speziellen Beispiels-Zustandsvektor ohne die Potenzen vonMgerechnet wird, bis derselbe wieder herauskommt, ist ein Punkt Abzug vorzunehmen.*
b)	Da $k > 1$ ist, nimmt der Bestand nach n Übergängen zu. Aus $L^n = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k \cdot E$ folgt, dass sich jeder Zustandsvektor im Laufe von n Schritten um den Faktor k vervielfacht hat.

4.2.4 Stochastik

Stochastik 1 - Probeklausur 2014 (eA)

Lösungsskizze
Ansatz für Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei genau zwei Würfen zweimal auf dem Kopf liegen bleibt: $p_k \cdot p_k = p_k^2$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei genau zwei Würfen zweimal auf dem Kopf liegen bleibt: $p_k^2 = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei einem Wurf auf dem Kopf liegen bleibt: $p_k = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$ Ansatz für Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei genau zwei Würfen genau einmal auf dem Kopf liegen bleibt: $2 \cdot p_k \cdot p_s = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6$ Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei genau zwei Würfen genau einmal auf dem Kopf liegen bleibt: 0,48

Stochastik 2 - Abitur 2014 (eA)

	Lösungsskizze
a)	Es ist $P(X_1 = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^4$
b)	Eine mögliche Antwort ist: Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass bei Zugrundelegung von X_1 zwei oder weniger Treffer erzielt werden.
c)	Darstellung der Verteilung: