Schülerzirkel Mathematik

Impulse für den Mathematikunterricht in der Grundschule, Teil 2

Hamburg

Impressum

Herausgeber:
Behörde für Schule und Berufsbildung
Referat Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

Leitung PriMa: Werner Renz, Referatsleiter
Redaktion: Stefan Schmack, Louise Schroeder Schule Hamburg
Brigitta Hering, Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung Hamburg
Layout: Anja v. Zitzewitz

Hamburg, Juni 2012
Auflage: 2500

Alle Rechte vorbehalten. Jegliche Verwertung dieses Druckwerkes bedarf
der schriftlichen Einwilligung des Herausgebers.

Schülerzirkel Mathematik

Handreichung zum Mathematikunterricht der Grundschule

Fachreferent: Werner Renz, Amt für Bildung, B 52-3

Verfasser: Stefan Schmack, Louise-Schroeder-Schule

Brigitta Hering, Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung

mit Beiträgen von Maria Christoph, Georg Heusch, Elke Pfannkuche, Antje Karen Reinhardt, Christine Ritter, Benedikt Rocksien, Karoline Schmitt, Dagmar Siebert, Claudia Spoo, Beate Tams, Christiane Theiß

Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung
Hamburg, Juni 2012

Inhalt

1 Leitidee Zahl 8

1.1 Zahlen im Quadrat *(Kopiervorlage K 1-6; S.13-18)*
Quadratisch angeordnete Zahlen addieren und Zusammenhänge entdecken 9
1.2 Zahlengitter: Zielzahl 100
Von einer Startzahl vertikal und horizontal zur Zielzahl gelangen 11
1.3 Nullmauern
Zahlenmauern einmal anders 19
1.4 Kakuro *(Kopiervorlage K 7; S.23)*
Eine Kombination aus Kreuzworträtsel und Zahlenlogik 21

2 Leitidee Messen 26

2.1 Hinz und Kunz brauchen Wasser
Eine Umfüllaufgabe 27
2.2 Uhrenvergleich
Funktionaler Zusammenhang beim Rechnen mit Zeiteinheiten 30
2.3 Bilder mit Mathematik
Eine Aufgabe zum mathematischen Modellieren 33
2.4 Tiere für den Streichelzoo
Kaufe für 100 Euro genau 100 Tiere 36

3 Leitidee Raum und Form 40

3.1 Das Möbiusband
Ein dreidimensionales Objekt mit nur einer Fläche und einer Kante? 41
3.2 Pentominos
Figuren aus 5 Quadraten finden und mit ihnen Flächen auslegen 43
3.3 Knobel-Quadrate *(Kopiervorlage K 8-11; S.48-51)*
Figuren nach einer Regel zeichnen und mit ihnen Streckenzüge legen 46
3.4 Der Fröbelstern
Eine Falt- Flechtaufgabe 52

4 Leitidee Muster und Strukturen 55

4.1 Zahlenketten *(Kopiervorlage K 12-13; S.59-60)*
Zahlenfolgen berechnen und untersuchen 56
4.2 Symbole in das Quadrat *(Kopiervorlage K 14-15; S.63-64)*
Figuren nach Regeln auf einem Spielplan verteilen 61
4.3 Ein Kartenhaus
Gesetzmäßigkeiten entdecken und zum geschickten Rechnen nutzen 65
4.4 Schokoladenaufgabe
Wie viele Brechungen sind notwendig, um eine Schokoladentafel zu zerlegen? 67

5 Leitidee Daten und Zufall 70

5.1 Briefumschläge
Eine Aufgabe zur Wahrscheinlichkeit 71
5.2 Superhirn – Mastermind *(Kopiervorlage K 16; S.76)*
Ein Spiel zur Kombinatorik mit Ziffern 74
5.3 Würfelprodukte *(Kopiervorlage K 17-20; S.79-82)*
Wie gerecht ist die Spielregel? 77
5.4 Froschsprünge
Alle Sprungkombinationen zur Bachüberquerung finden 83

6 Literatur 86

Vorwort

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

das MINT-Referat der Behörde für Schule und Berufsbildung überreicht Ihnen mit der vorliegenden Aufgabensammlung den zweiten Teil der Handreichung zum Mathematikunterricht in der Grundschule. Sie ist Bestandteil der „Impulse für den Mathematikunterricht der Grundschule“, einer Reihe von Unterrichtshilfen, die zur Entwicklung und Implementation des Rahmenplans Mathematik für die Grundschule erarbeitet werden.

Eingebettet in das Grundschulprojekt PriMa (Kinder der Primarstufe auf verschiedenen Wegen zur Mathematik) zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Grundschule wurde das Forschungs- und Förderprojekt „Besondere mathematische Begabung im Grundschulalter“ vor zwölf Jahren unter der wissenschaftlichen Leitung von Frau Prof. Dr. Marianne Nolte, Fachbereich Erziehungswissenschaft der Universität Hamburg, eingerichtet. Begleitet wird die Maßnahme seither von Schülerzirkeln Mathematik, die allen Dritt- und Viertklässlern mit Interesse an mathematischen Aktivitäten offen stehen. Die Mathematikzirkel werden von erfahrenen und engagierten Grundschullehrerinnen und -lehrern, in der Regel ausgebildeten PriMa-Moderatorinnen und PriMa-Moderatoren, betreut.
In einem Arbeitskreis tauschen sich die Zirkelleiterinnen und Zirkelleiter über methodisch-didaktische Fragen sowie über ihre Erfahrungen bei der Erprobung von geeigneten Aufgabenstellungen wie der so genannten „Probleme des Monats“ in den Schülerzirkeln aus.

Die vorliegende Aufgabensammlung ist ein Ergebnis der Zusammenarbeit der Zirkelleiterinnen und Zirkelleiter. Autor und Autorin haben dazu Aufgabenstellungen, die im Arbeitskreis vorgelegt, diskutiert und in den Mathematikzirkeln erprobt wurden, ausgewählt, aufbereitet und gegebenenfalls ergänzt.

Die Aufgaben sind so angelegt, dass sie verschiedene Lösungswege ermöglichen und auf verschiedene Weise erarbeitet werden können. Im Hinblick auf eine natürliche Differenzierung, z.B. bei Kindern mit besonderen Begabungen, sind auch Bearbeitungen auf unterschiedlichem Niveau möglich. Die Aufgaben sollen die Kinder zur Selbsttätigkeit und zu forschend-entdeckendem Lernen anregen, das sowohl individuell als auch im Austausch mit anderen Kindern stattfinden kann. Eigene Lösungsansätze werden mit denen anderer Kinder verglichen, gemeinsam eingeordnet und bewertet. Von daher werden Arbeitsweisen und die Entwicklung mathematischer Kompetenzen gefördert, deren Entwicklung auch der neue Rahmenplan Mathematik für die Grundschule vorsieht. Grundsätzlich sind die Aufgabenstellungen geeignet, über die Zirkelarbeit hinaus auch im regulären Mathematikunterricht eingesetzt und erprobt zu werden. Dazu möchten wir alle Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer der Grundschule ermuntern.

Für das Zustandekommen dieser Handreichung ist vielen Kolleginnen und Kollegen zu danken, einmal den Zirkelleiterinnen und Zirkelleitern, die an der Entwicklung und Bearbeitung von geeigneten Aufgabenstellungen mitgewirkt haben und eigene Ideen und Anregungen einbrachten, insbesondere aber Herrn Stefan Schmack, Zirkelleiter und Lehrer an der Louise-Schroeder-Schule, sowie Frau Brigitta Hering, PriMa-Koordinatorin und Mathematikfortbildnerin des Landesinstituts für Lehrerbildung und Schulentwicklung, die die Handreichung in die vorliegende Fassung gebracht haben und denen ich für die geleistete Arbeit herzlich danke.

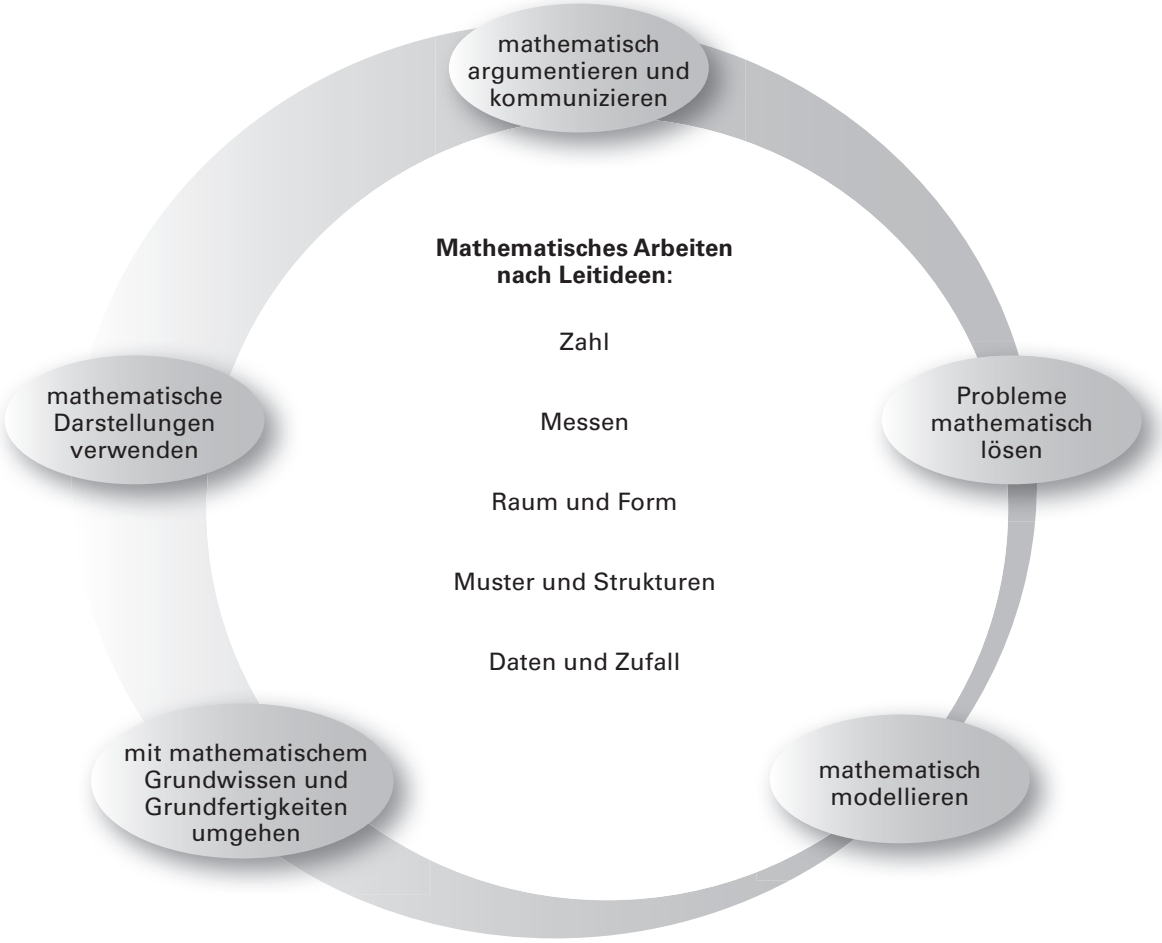
Wir würden uns freuen, wenn wir aus den Schulen Rückmeldungen mit Hinweisen oder Anregungen für den Einsatz der hier vorgelegten Aufgaben in der Zirkelarbeit oder im Unterricht erhielten.

Werner Renz
Leitung PriMA

Einleitung

Seit über 12 Jahren gibt es den *Schülerzirkel-Mathematik* in Hamburger Grundschulen, ein Angebot für mathematisch besonders interessierte und begabte Dritt- und Viertklässler. Grundlage der Arbeit in den Mathematik-Zirkeln sind die so genannten *Probleme des Monats*. Hier handelt es sich um herausfordernde Aufgaben, die von einzelnen Zirkelleitern ausgewählt und für die Arbeit in den Zirkeln vorbereitet wurden. Eine erste Zusammenfassung dieser Probleme erschien nach fünf Jahren Zirkelarbeit im Jahre 2004 in Form einer ersten Handreichung.
Dies ist nun der zweite Band in dieser Reihe. Er enthält eine Auswahl von Problemen des Monats aus den letzten Jahren Schülerzirkel-Mathematik. Ausgewählt und ausführlich kommentiert wurden 20 der ca. 40 Probleme aus den Jahren 2005 bis 2011. Dass nicht alle Aufgaben Eingang in die Handreichung fanden ist keine qualitative Wertung, sondern liegt in dem begrenzten Umfang des Heftes begründet.
Bei der Auswahl der Probleme wurde darauf geachtet, dass alle fünf Leitideen (oder inhaltsbezogenen Kompetenzen) der Mathematik vertreten sind. Die Zuordnung erfolgte auf Grund der thematischen Schwerpunkte innerhalb der Aufgabe. Alle Probleme berühren darüber hinaus verschiedene andere Leitideen. Insbesondere die Leitidee Muster und Strukturen findet sich in der Vernetzung der Ideen nahezu in jeder Aufgabe wieder.
Neben den inhaltsbezogenen Kompetenzen werden in der Auseinandersetzung mit diesen Aufgaben auch die so genannten allgemeinen mathematischen Kompetenzen gefördert und gefordert.

Mathematikunterricht in der Grundschule



Ein weiteres Kriterium bei der Auswahl der Probleme war der Wunsch, solche Aufgaben vorzustellen, die nicht nur von mathematisch besonders begabten, sondern von allen Kindern in einer Klasse bearbeitet werden können. Dabei ist der Anspruch nicht, dass alle Kinder jede Aufgabe komplett lösen sollen. Vielmehr bieten die hier vorgestellten Probleme vielfältige Möglichkeiten der Auseinandersetzung und der Bearbeitung unter der Berücksichtigung der drei Anforderungsbereiche, wie sie in den Beschlüssen der Kultusministerkonferenz von 2004 beschrieben wurden.

Bei den Aufgabenbeispielen lassen sich folgende Anforderungsbereiche unterscheiden:

AB	Anforderungsbereich	Das Lösen der Aufgabe erfordert…
AB I	*Reproduzieren*	Grundwissen und das Ausführen von Routinetätigkeiten.
AB II	*Zusammenhänge herstellen*	das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen.
AB III	*Verallgemeinern und Reflektieren*	komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern.

Aspekte der einzelnen Aufgaben, die sich den Anforderungsbereichen zuordnen lassen sind im Text mit (AB I), (AB II) oder (AB III) gekennzeichnet.

Zur zusätzlichen Ausgestaltung der *Probleme des Monats* sind bei einigen Problemstellungen variierte Kopiervorlagen in der Auseinandersetzung in der Zirkelarbeit mit den Kindern entstanden. Diese Ergänzungen stellen wir Ihnen hiermit zur Verfügung. Die Kopiervorlagen sind entsprechend gekennzeichnet mit (K1, K2,...)

Damit können die Aufgaben Grundlage zu einer stärkeren Individualisierung des Unterrichts werden, ohne Aspekte wie soziales Lernen zu vernachlässigen, da alle Kinder am selben Problem arbeiten und sich gegenseitig anregen und unterstützen können.
Neben ausführlichen didaktischen und methodischen Kommentaren zu den Problemen finden sich in diesem Heft Kopiervorlagen zu einem Teil der Aufgaben, die zur Hinführung oder als Ergänzung genutzt werden können. Neben den Quellenverweisen im Anschluss an die einzelnen Aufgaben befindet sich eine Auswahl an Arbeitsmitteln zur jeweiligen Idee am Ende jedes Kapitels sowie eine Liste mit zusätzlicher Literatur am Ende des Heftes.

1 Leitidee Zahl

Das Arbeiten mit natürlichen Zahlen und das Rechnen mit diesen Zahlen stehen im Mittelpunkt des Mathematikunterrichts der Grundschule.

Der Kompetenzbereich der Idee Zahl gliedert sich in drei Bereiche:

- Zahlräume und Zahlbegriff,
- Zahloperationen,
- in Kontexten rechnen.

Die Bereiche sind eng miteinander verbunden und bauen aufeinander auf (Rasch/Schütte in Walther 2008).

1.1 Zahlen im Quadrat

Zahlen im Quadrat

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

- Wähle fünf Felder in dem 5x5-Quadrat so aus, dass aus jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Feld vorkommt. Addiere die fünf Zahlen aus den fünf Feldern.
- Wiederhole dieses mehrere Male mit verschiedenen Feldern.
- Welche Ergebnisse erhältst du?
- Welche Summe erhält man bei 6x6, 7x7, 8x8, 9x9 und 10x10 – Quadraten (bei gleichen Bedingungen)?
- Kannst du ein System entdecken? Überlege und begründe.

Worum geht es?

Bei dieser Aufgabe geht es um das (scheinbar) erstaunliche Phänomen, dass man, wenn die oben beschriebene Regel richtig angewandt wird, bei jeder Addition die gleiche Summe erhält. Das Auswählen verschiedener Zahlen nach der beschriebenen Regel sowie deren Addition ist eine Aufgabe, die meist alle Kinder der Klasse bewältigen. Eine Erklärung für die Konstanz der Summen zu finden, wird in der Regel nur einem Teil der Klasse gelingen.

Was soll geübt werden?

Die Schüler lernen eine Regel zur Auswahl von Zahlen kennen und üben diese richtig anzuwenden. Daneben wird die Addition von Zahlen bis 100 (bei größeren Quadraten auch darüber hinaus) geübt. Die Kinder sollen Gesetzmäßigkeiten bei der Anordnung der Zahlen erkennen, beschreiben und zum Lösen des Problems nutzen.

Was wird benötigt?

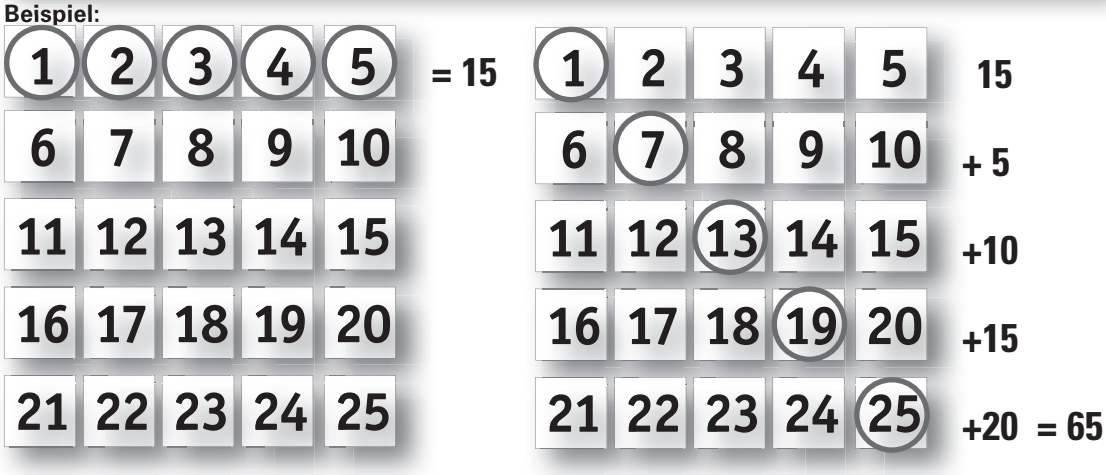
Da die Kinder die Zahlen wiederholt kennzeichnen müssen, werden Arbeitsblätter mit leeren 5x5 Quadraten benötigt, in die die Kinder zunächst die Zahlen eintragen, um dann einzelne Zahlen auszuwählen und zu kennzeichnen. Zur Veranschaulichung der Tatsache, dass die Summe der 5 ausgewählten Zahlen immer gleich ist, können farbig-transparente Chips hilfreich sein.

Wie kann man vorgehen?

Zunächst sollte die Regel zur Auswahl der fünf Summanden gemeinsam besprochen und an Beispielen an der Tafel erläutert werden. Will man an dieser Stelle nicht zu viel verraten, lässt man die Summe noch nicht berechnen.
Wenn alle Schüler die Regel verstanden haben, sollen sie zunächst selbst einige Beispiele durchrechnen (AB I). Dabei wird meist schnell klar, dass das Ergebnis (solange keine Rechenfehler gemacht wurden) immer das gleiche ist (AB II). Bei der Antwort auf die Frage nach dem Grund für diese Besonderheit benötigen viele Kinder erfahrungsgemäß Hilfen (AB III).

TIPP: Bitten Sie die Schüler, die Summe der ersten Zeile des Quadrates zu berechnen, diese ist 15. Anschließend schaut man sich gemeinsam die einzelnen Spalten an. Der Unterschied von der obersten Zahl zur der darunter beträgt 5, der zur Zahl darunter 10, dann 15 und zur letzen Zahl in der Spalte beträgt er 20. Dies gilt für alle Spalten. Wenn die Schüler nun alle 5 Chips zunächst in die erste Zeile legen, um sie dann der Regel entsprechend nach unten verschieben, können sie erkennen, dass die Summe immer 15+5+10+15+20=65 ist.

Beispiel:



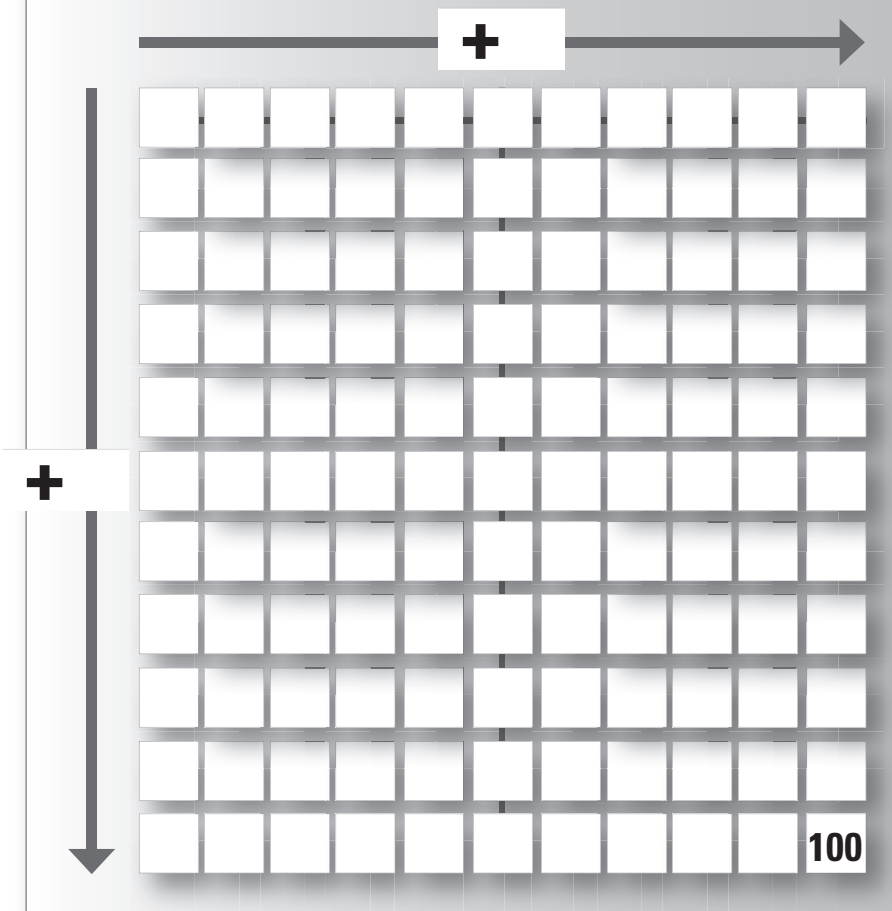
Im Fall des 5x5 Quadrates besteht auch die Möglichkeit die Werte in den Feldern auszugleichen. Dazu wird die erste Zahl mit der letzten addiert und anschließend durch 2 geteilt. Die beiden Hälften haben den Wert 13. Wird dies mit allen anderen Zahlen wiederholt ((2+24):2, (3+23):2,....) erhält man für jedes Feld den Wert 13 und 5 mal 13 ist wieder 65. Die wenigsten Kinder werden eine der Begründungen selbst finden und formulieren können, sie bei der gemeinsamen Erarbeitung zu verstehen und nachzuvollziehen dürfte wiederum vielen Kindern gelingen.

Wie kann es weiter gehen?

Da die Quadrate durch Vergrößern und Verkleinern leicht zu variieren sind, bietet sich an, die beim 5x5 Quadrat gewonnenen Kenntnisse an anderen Quadraten zu überprüfen. Dabei ist zu beachten, dass die Summen relativ schnell ansteigen. Bei einem 7x7 Quadrat beträgt die Summe bereits 175.

($\sum = \frac{n^3 + n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, n bezeichnet die Seitenlänge des Quadrates.)
Außerdem gelingt die Begründung mit Hilfe des Ausgleichs der Felder nur bei Quadraten mit einer ungeraden Anzahl von Feldern. Alternativ kann beim Einsetzen der Zahlen in ein 5x5 Quadrat mit Zahlen >1 begonnen werden. In jedem Fall ist es interessant, die Kinder vor dem Ausrechnen der Summen diese schätzen zu lassen.
Quelle: Böhmer, J. P. (2005): Mathe-Ass. Materialien für leistungsstarke Kinder in der Grundschule, S. 25/26 Donauwörth: Auer-Verlag.

1.2 Zahlengitter: Ziehlzahl 100



Aufgabenvorschrift:
Es gibt eine sogenannte Startzahl im oberen linken Feld.
Dann schreibt man fortlaufend in die benachbarten Felder die um die linke bzw. um die oberer Pluszahl vermehrte Zahl.
Die rechte untere Zahl heißt Zielzahl.

Aktivität:
Es sind hier weder Startzahl noch die beiden Pluszahlen gegeben.
Überlege selbst:

- Welche Möglichkeiten gibt es, das Gitter nach Vorschrift zu füllen?
- Finde alle Möglichkeiten.
- Vergleiche die gefundenen Möglichkeiten: Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede fallen auf?

Forscheraufgabe: Was ändert sich wie, wenn eine der beiden Pluszahlen um 1 (2) erhöht wird?

Worum geht es?

Das Zahlengitter ist ein operatives Aufgabenformat, mit dessen Hilfe Grundfertigkeiten geübt werden, an dem aber auch vielschichtige Zahlbeziehungen entdeckt und erläutert werden können. Dieses Format ist in besonderer Weise geeignet, um mit der gesamten Klasse in die Arbeit einzusteigen. Im Laufe der Arbeit können dann die Aufgabenstellungen für die einzelnen Schüler je nach Leistungsstand variiert und differenziert werden.

Was soll geübt werden?

Bei der Auseinandersetzung mit Zahlengittern wird die Addition intensiv geübt. Darüber hinaus haben die Schüler Gelegenheit, Zahlzusammenhänge und strukturelle Gemeinsamkeiten von Zahlengittern zu entdecken und zu beschreiben. Die weiterführenden Fragestellungen regen zum Kommunizieren und Argumentieren an.

Wie kann man vorgehen?

Die oben gezeigte Aufgabe ist eher eine, die am Ende einer Einheit zu Zahlengittern stehen sollte, da sie schon auf Grund der Größe des Gitters anspruchsvoll ist.
Starten sollte man mit einem 3x3 Gitter. Mit diesem Gitter wird zunächst an der Tafel das Aufgabenformat erläutert. Dabei beginnt man am besten mit einer Startzahl und zwei Pluszahlen und zeigt, wie das Gitter gefüllt wird. Anschließend wiederholen dies mehrere Schüler an der Tafel. Dabei sollten auch die Möglichkeiten die 0 als Start- oder Pluszahl zu nutzen und die Verwendung zweier gleicher Pluszahlen berücksichtigt werden.
Anschließend kann mit der Kopiervorlage 1 (K 1) das richtige Ausfüllen der Zahlengitter mit unterschiedlichen Start- bzw. Pluszahlen geübt werden (AB I).
Die Schüler bekommen dann die Aufgabe, ausgehend von der Startzahl 0 alle Pluszahlenpaare zu finden, die zur Zielzahl 20 führen (Kopiervorlage K 2). Erste richtige Lösungen werden an der Tafel als Orientierung für alle gesammelt. Glauben die Kinder alle Lösungen gefunden zu haben, geht es darum, Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei den Lösungen zu entdecken und zu beschreiben bzw. darum zu begründen, warum alle (oder noch nicht alle) Lösungen gefunden wurden (AB II).
Die Kopiervorlage K 4 bietet die Möglichkeit, die zur Zielzahl 20 gesammelten Erkenntnisse auf die Zielzahl 40 innerhalb eines 5x5 Quadrates zu übertragen.
Kinder, denen dieser Transfer gelingt, werden auch bei dem großen 11x11 Quadrat zu einzelnen Lösungen bzw. zu einer Systematik gelangen, die ihnen Aussagen über alle möglichen Lösungen erlaubt (AB III).

TIPP: Zur schnellen Überprüfung der Schülerlösungen, kann ein algebraischer Lösungsansatz sinnvoll sein.

Für die Startzahl wird s, für die Zielzahl z und die beiden Pluszahlen a und b als Variablen eingesetzt. Es gilt: $a, b, s, z \in \mathbb{N}_0$.

Für ein 3 x 3 Zahlengitter ergibt sich dann die Gleichung: $s + 2a + 2b = z$
Ist s = 6, a = 9 und b = 12 erhält man für z:
$6 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 12 = 6 + 18 + 24 = 48$

Für das 11x11 Zahlengitter lautet die Gleichung: $s + 10a + 10b = z$

Ausgehend von der Zielzahl 100 erhalten wir folgende Gleichung: $s + 10a + 10b = 100$
umgestellt nach s: $s = 100 - (10a + 10b)$
$s = 10\,(10 - (a + b))$,

wenn $a + b \leq 10$, dann kann s jedes Vielfache von 10 zwischen 0 und 100 sein,
wenn $a + b > 10$, dann gibt es für s keine Lösung in $\mathbb{N}_0$.

Wie kann es weiter gehen?

Ausgehend von einem 3x3 Zahlengitter gibt es unzählige Variations- und Differenzierungsmöglichkeiten.

Hier nur einige Beispiele:

Neben quadratischen können auch rechteckige Zahlengitter erforscht werden.
Man kann Zahlengitter untersuchen, bei denen eine Pluszahl das Vielfache der anderen ist.
Es können die Zielzahl und eine oder beide Pluszahlen vorgegeben werden.
Es könnte auch eine der Diagonalen vorgegeben sein (Kopiervorlage K 3).
Es kann der Frage nachgegangen werden:
Welche Zahlen kann man als Zielzahl erreichen, welche nicht?

Quelle: Selter, Ch. (2004): Zahlengitter – eine Aufgabe, viele Variationen, in: Die Grundschulzeitschrift 177/2004, S. 42-45. Seelze: E. Friedrich Verlag.

K 1 Zahlengitter

Name:

+7

+7

0		

+18

+11

7		

+

+

0		

+

+

+

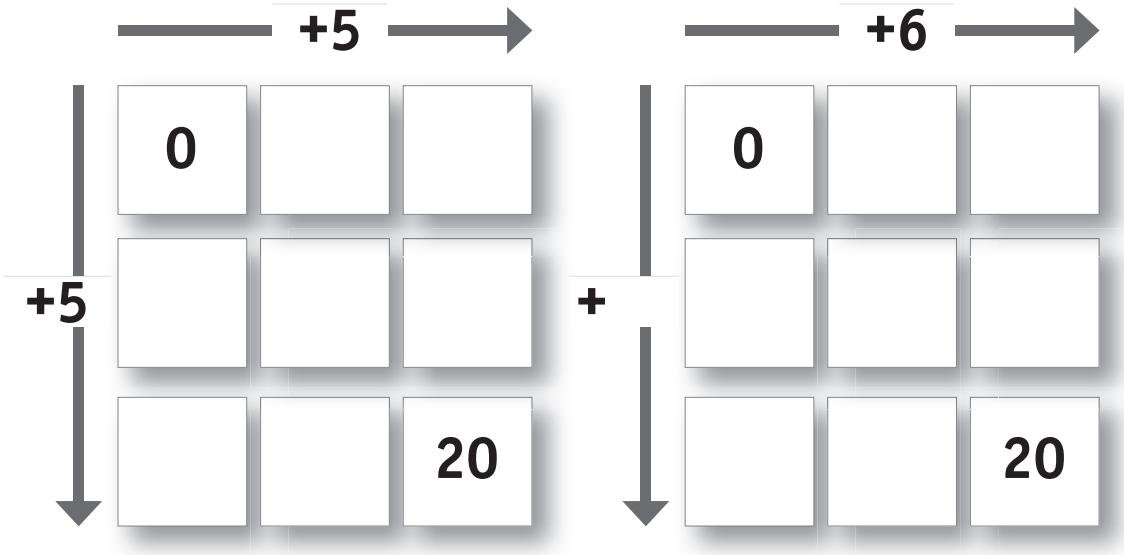
+

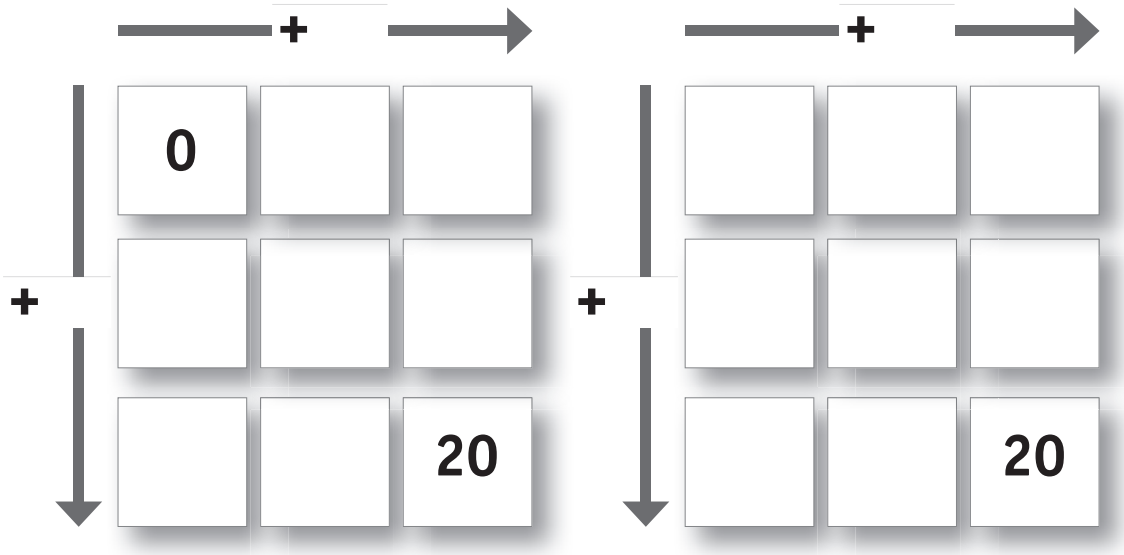
+

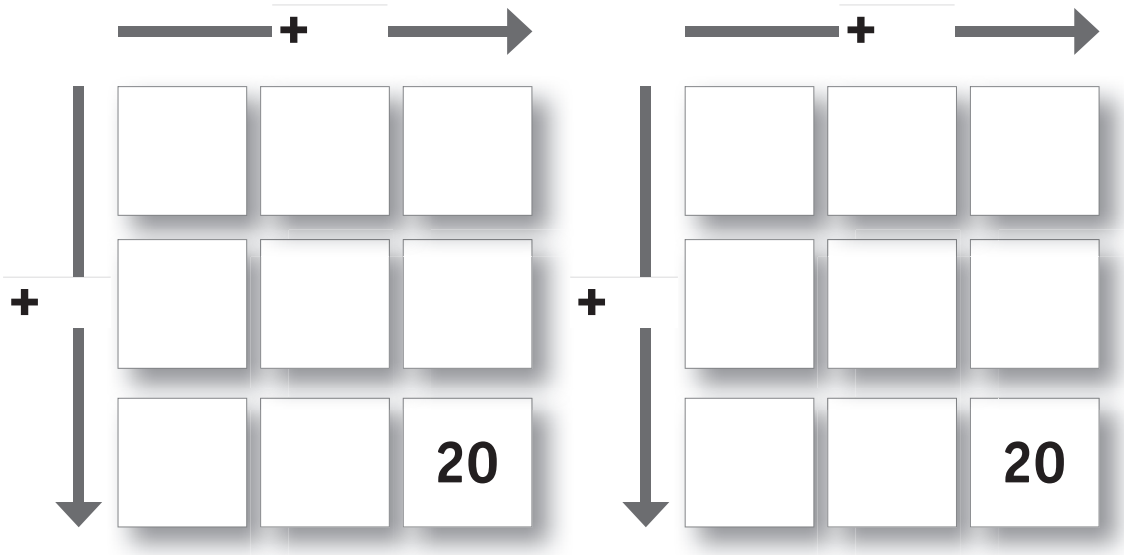
+

K 2 Zahlengitter

Name:







K 3 Zahlengitter

Name:

0		
	10	
		20

0		
	15	
		30

0		
	25	
		50

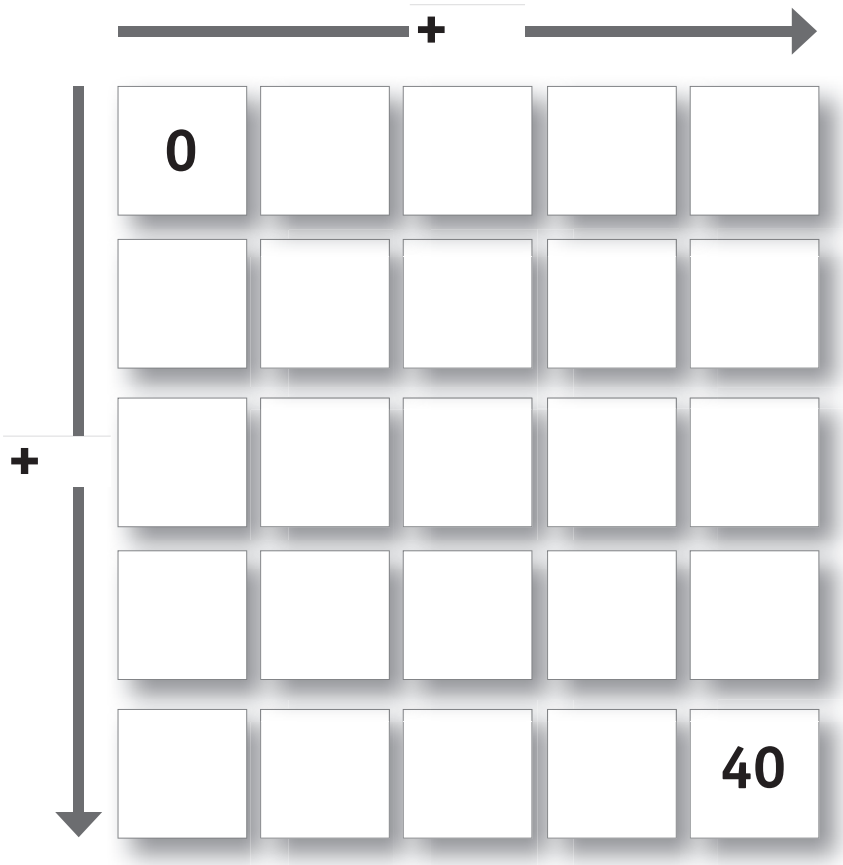
0		
	19	
		38

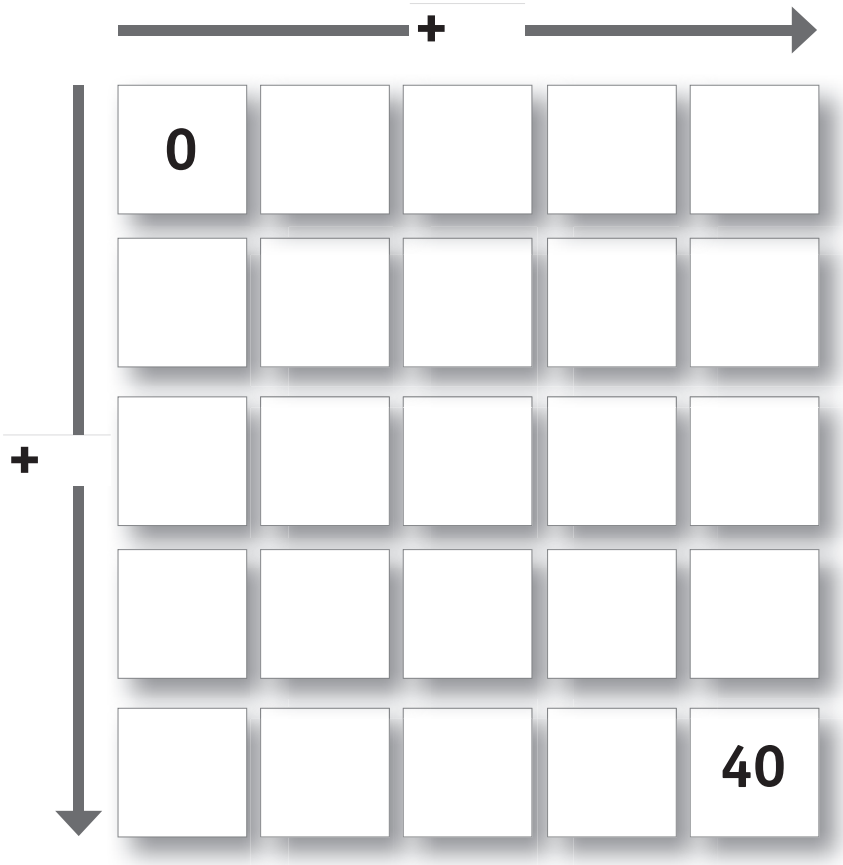
		10
	10	
10		

		10
	11	
12		

K 4 Zahlengitter

Name:





K 5 Zahlengitter Name:

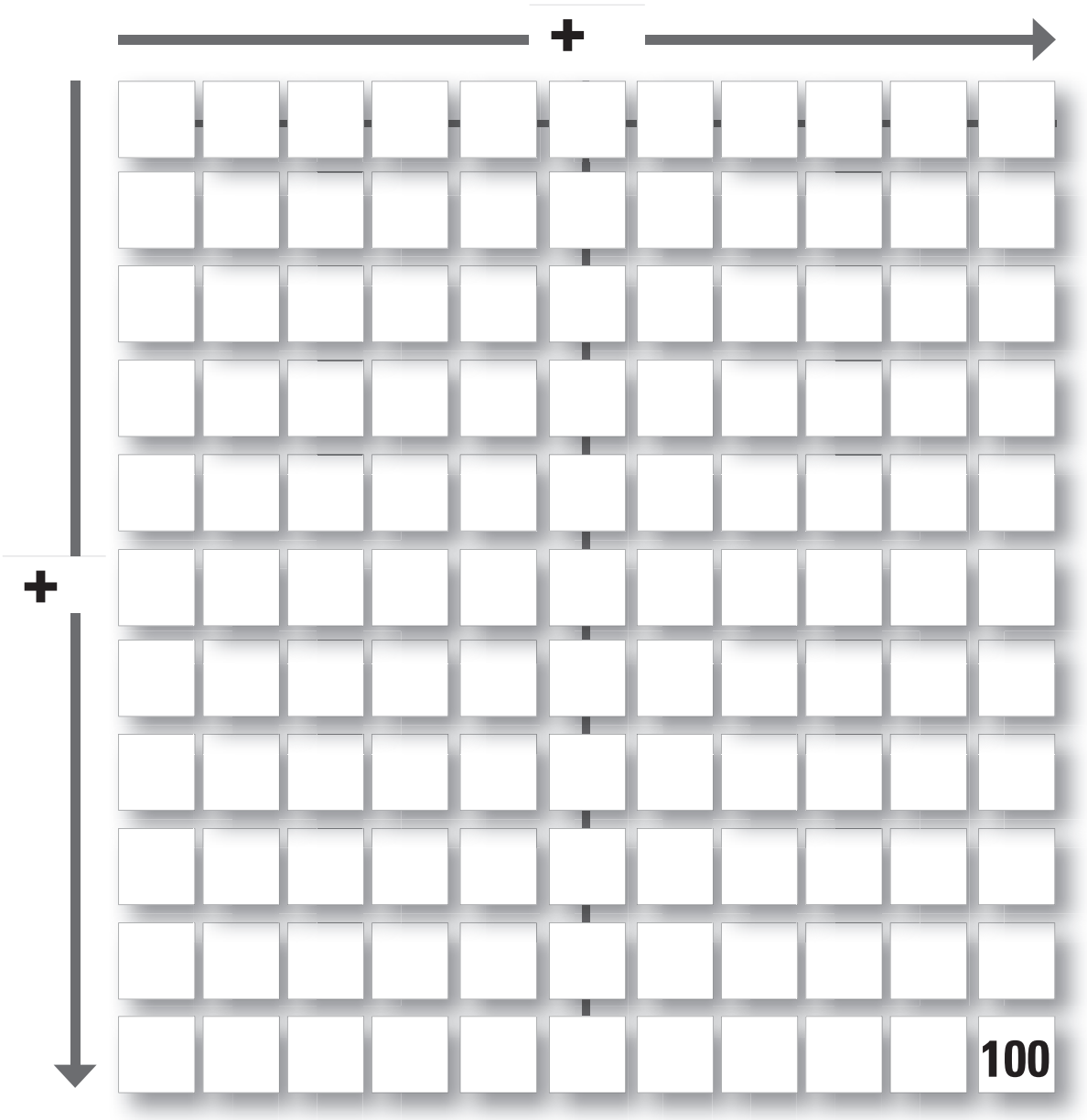
Regeln:

In dem Zahlengitter gibt es eine **Startzah**l (oben links) und eine **Zielzahl** (unten rechts). Außerdem geben die obere und die linke **Pluszahl** die Rechenvorschrift an. Die Zahlen erhöhen sich von links nach rechts von Kästchen zu Kästchen immer um die obere Pluszahl und von oben nach unten um die linke Pluszahl.

Aufgaben:

Kann die **Zielzahl** 100 sein? Die **Startzahl** und die **Pluszahl** sind nicht gegeben.

1. Welche Möglichkeiten gibt es, das Gitter nach den Regeln auszufüllen?
Finde alle Möglichkeiten und schreibe sie in die Tabelle!
(Du kannst nur einen Teil des Gitters ausfüllen oder es dir ganz und gar vorstellen.)



K 6 Zahlengitter
Zielzahl 100

Name:

Startzahl	obere Pluszahl	linke Pluszahl

2. Vergleiche die verschiedenen Möglichkeiten:
Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede fallen dir auf?

_____

_____

_____

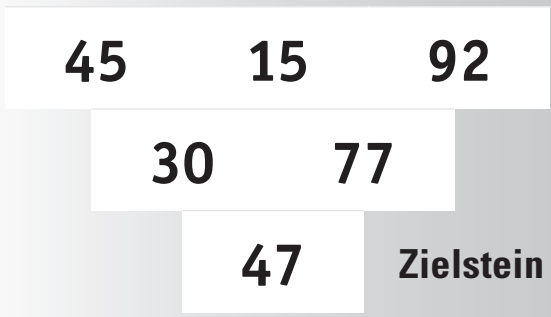
3. Was ändert sich, wenn du eine der beiden Pluszahlen um 1 (um 2) erhöhst?

_____

_____

_____

1.3 Nullmauern



Achtung, neue Regel!
In jedem Stein soll jetzt der Unterschied zwischen den beiden über ihm liegenden Steine stehen.

1. Findet verschiedene 3er-Mauern, deren Zielstein auf Null endet. Wie muss dafür eine Grundreihe aussehen?

2. Wie viele Nullmauern kann man bauen, wenn in der Grundreihe nur die Zahlen 0 bis 10 (auch mehrfach) stehen dürfen?

Worum geht es?

Bei den Nullmauern handelt es sich um eine spezielle Form der so genannten Unterschiedsmauern, die wiederum eine Variante der bekannten Zahlenmauern sind.
Während bei den normalen Zahlenmauern die Zahlen in zwei benachbarten Steinen addiert werden und das Ergebnis im darüber liegenden Stein notiert wird, verläuft der Aufbau einer Unterschiedsmauer umgekehrt. Hier sind die Grundsteine oben und der Unterschied (Absolutbetrag der Differenz) zweier benachbarter Steine wird im Stein darunter notiert. Da nicht zwangsläufig die größere der beiden Zahlen links steht, wird nicht von Minusmauern gesprochen.
Nullmauern haben die Besonderheit, dass der Zielstein ganz unten den Wert 0 haben soll.
Analoge Aufgaben gibt es bei den Zahlenmauern (Zielstein 10, 20, 100,...)

Was soll geübt werden?

Bei der Auseinandersetzung mit dieser Aufgabe werden das Minusrechnen sowie das Ergänzen intensiv geübt. Daneben lernen die Kinder die Variation einer bekannten Aufgabenstellung kennen und üben die Anwendung neuer Regeln zur Bildung der Mauern. Auch wird das systematische Probieren sowie das Kommunizieren und Argumentieren geübt.

Was wird benötigt?

Neben dem Aufgabenblatt benötigen die Schüler Blätter mit jeweils mehreren leeren Mauern, um ihre Versuche zu notieren. Eine leere Mauer, die per Projektor an die Tafel projiziert wird, erleichtert die Erläuterung der Aufgabenstellung und hilft am Ende bei der Vorstellung und Besprechung der Ergebnisse. Ebenfalls hilfreich sind Kopien mit jeweils einer leeren Mauer in Größe DIN A4, in die später die gefundenen Nullmauern eingetragen werden, um sie an der Tafel zu präsentieren.

Wie kann man vorgehen?

Zunächst wird an einem Beispiel die Bildungsvorschrift der Unterschiedsmauern erläutert. Dabei kann darauf eingegangen werden, warum der Begriff Minusmauern nicht korrekt wäre. Anschließend werden erste Unterschiedsmauern von den Kindern auf einem Arbeitsblatt oder gemeinsam an der Tafel gelöst, um sicherzustellen, dass die Regel von allen verstanden wurde.
Nachdem die Schüler weitere Unterschiedsmauern berechnet haben, wird die Frage nach den Nullmauern gestellt.
Auch wenn die Kinder nicht sofort Nullmauern finden, sollte man sie ruhig eine Weile probieren lassen und höchstens allgemein strategische Tipps bezüglich der Auswahl der Startzahlen geben oder den Hinweis geben, rückwärts bzw. von unten nach oben zu arbeiten (AB I).
Gefundene Nullmauern werden in die groß kopierten Vorlagen eingetragen und an der Tafel gesammelt. Diese Beispiele helfen in der Regel dabei, weitere Nullmauern zu finden. Je mehr Lösungen gefunden wurden, umso deutlicher wird, welche Bedingungen für die Auswahl der Zahlen in den Grundsteinen gelten. Um dies noch deutlicher zu machen, werden die Kinder aufgefordert, die gefundenen Lösungen zu kategorisieren.

TIPP: Beim gemeinsamen Ordnen der Lösungen ist damit zu rechnen, dass die Schüler durchaus vielfältige Muster entdecken und nicht nur und sogleich die im Folgenden genannten!

Bei einer genügend großen Anzahl von Lösungen wird deutlich, dass es drei Bedingungen bei der Auswahl der Grundreihen-Zahlen gibt.

1. Alle drei Zahlen sind gleich, oder
2. Die beiden Randsteine sind gleich, der mittlere Stein ist beliebig, oder
3. Die Zahlen in der Grundreihe haben den gleichen Abstand (≥ 1) zueinander.
   (Beispiele: 2, 4, 6 oder 48, 40, 32)

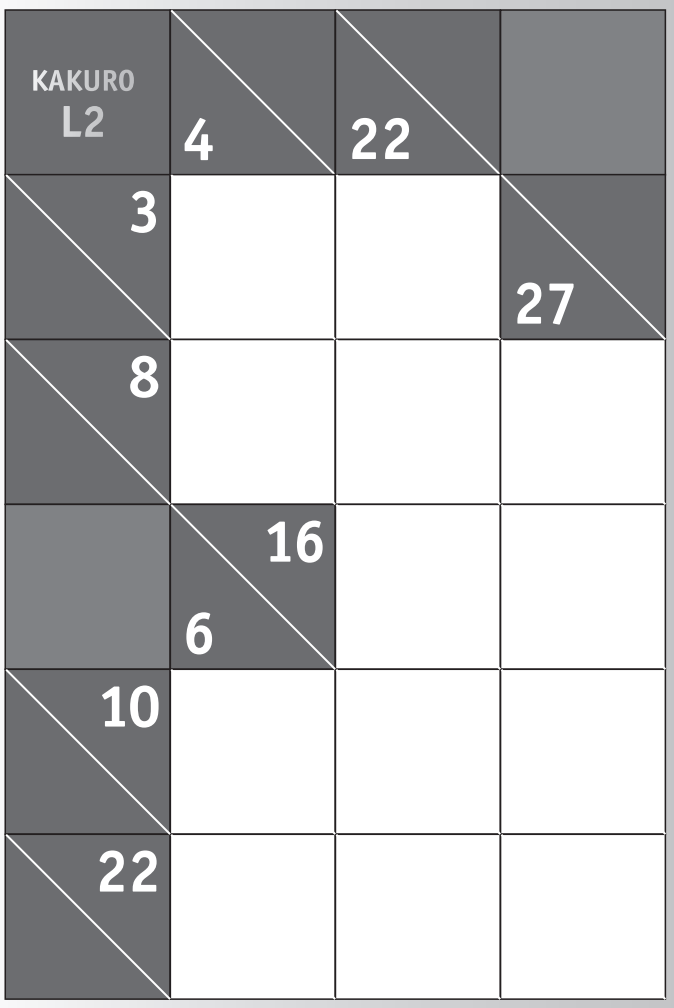
Diese Bedingungen sollten nicht vorgegeben werden, sondern von den Schülern selbständig entdeckt und artikuliert werden (AB II).
Dieses Wissen hilft bei der Lösung von Aufgabenteil 2. Wichtig ist hier, möglichst systematisch vorzugehen und sich mit den Kindern darauf zu einigen, ob bei den Lösungen, die die dritte Bedingung erfüllen auch Spiegelungen als neue Lösungen gelten (2, 4, 6 und 6, 4, 2) (ohne Spiegelungen kommt man auf insgesamt 146 Lösungen, mit auf 171) (AB III).

Wie kann es weitergehen?

Wie bei den Zahlenmauern gibt es auch bei den Unterschiedsmauern und Nullmauern diverse Möglichkeiten zur Differenzierung.
Man kann den Schülern Unterschiedsmauern mit Lücken anbieten, bei denen nicht alle Grundsteine, dafür aber einige der anderen Steine vorgegeben sind. Es kann an Stelle der Null eine andere Zielzahl festgelegt werden. Die Schüler können auch untersuchen, was mit der Zielzahl passiert, wenn die Zahlen in den Grundsteinen systematisch verändert werden (z.B. Erhöhung der Randsteine um 1).

Quelle: Krauthausen, G. (2006): Darf man auch sagen, wenn man Tricke ´rausgefunden hat? Eine dritte Klasse erforscht Nullmauern. In: Rathgeb-Schnierer, E./U. Roos (Hg.), Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht, S. 87-100. München: Oldenbourg-Verlag.

1.4 Kakuro



Kakuro!

1. In jeder Zeile und Spalte stehen Summen, die sich aus den Ziffern 1 bis 9 ergeben.
2. Beachte: Ein und dieselbe Ziffer darf als Summand einer Zahl nur genau einmal vorkommen.
   Beispiel: 4+2=6 ist erlaubt, 3+3=6 ist nicht erlaubt.
3. Die vorgegebene Zahl soll in so viele Summanden zerlegt werden, wie Kästchen in der dazugehörigen Zeile oder Spalte vorhanden sind.

Worum geht es?

Kakuro ist eine schon länger bekannte Rätselform. In Europa war sie früher in ähnlicher Form unter dem Namen Schwedenrätsel verbreitet.
Kakuros selbst stammen aus den USA und sind über Japan, wo sie vermutlich ihren Namen erhielten, und Großbritannien nach Deutschland gelangt. Sie werden auch als Zahlen-Kreuzworträtsel bezeichnet, was allerdings nicht ganz richtig ist, da Kakuros die Einschränkung besitzen, dass jede Ziffer in jeder Spalte und jeder Reihe nur einmal vorkommen darf. Jedes Kakuro besitzt eine eindeutige Lösung.

Was soll geübt werden?

Beim Lösen von Kakuros rechnen die Schüler die Additions-, Subtraktions- und Ergänzungsaufgaben im Zahlenraum bis 45 mit bis zu 9 Faktoren. Sie setzen sich intensiv mit den verschiedenen Möglichkeiten der Zerlegung von Zahlen in 2, 3,...., 9 Summanden auseinander. Sie müssen die Spielregeln nachvollziehen und verstehen und deren Einhaltung immer wieder überprüfen. Beim gemeinsamen Arbeiten und Vergleichen der Lösungen wird das Kommunizieren und Argumentieren geschult.

Was wird benötigt?

Für die Einführung und Erläuterung der Spielregeln werden einfache Kakuros im Format 4x4 genutzt. Diese sollten den Kindern als Kopie und dem Lehrer als Folie vorliegen. Um das Radieren auf Folie und Papier zu vermeiden, gäbe es auch die Möglichkeit mit einem großen Kakuro an der Tafel und magnetischen Zahlenkarten und kleinen Kakuros auf Papier mit passenden Zahlenkarten zu arbeiten.

Beispiel zum Einstieg:

		23	10
	16 / 11		
9			
19			

		23	10
	16 / 11	11	5
9	5	3	1
19	6	9	4

Für die weitere Arbeit werden Kakuros in unterschiedlicher Größe und mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden benötigt.

Wie kann man vorgehen?

Zunächst werden an einem Beispiel der Aufbau und die Regeln eines Kakuros verdeutlicht. Beim gemeinsamen Lösen der ersten Rätsel sollte immer wieder besprochen werden, wo sinnvoller Weise begonnen wird und welche Zahlen bereits eindeutig festliegen. In der Beispielaufgabe (S.21) etwa ist sicher, dass in der ersten Zeile die Zahlen 1 und 2 stehen müssen und zwar in dieser Reihenfolge. Denn 3 = 1+2 und würde links die zwei stehen, müsste darunter ebenfalls eine 2 geschrieben werden, um die erste senkrechte Summe 4 zu erhalten. Dies widerspricht der Regel, dass jede Ziffer in jeder Summe nur einmal vorkommen darf.
Jeder Lösungsvorschlag eines Schülers wird zur Diskussion gestellt und erst nach eingehender Prüfung und auf Grund einer logischen Begründung angenommen oder abgelehnt.

TIPP: Als Hilfe zur Lösung von Kakuros können sich die Kinder Listen machen mit möglichen Zerlegungen der Zahlen in ihrem Rätsel.

Beispiel: 3 = 1 + 2
4 = 1 + 3
5 = 1 + 4 oder 5 = 2 + 3
6 = 1 + 5 + oder 6 = 2 + 4 oder 6 = 1 + 2+3

Alternativ können solche Listen vom Lehrer vorgefertigt und den Schülern zur Verfügung gestellt werden. Eine weitere Hilfe können Kakuros sein, in die bereits einige Zahlen eingetragen wurden.

Wie kann es weiter gehen?

Da es Kakuros in den unterschiedlichsten Schwierigkeitsstufen gibt, sind der Differenzierung nach oben keine Grenzen gesetzt. Ein Forscherauftrag könnte zudem sein: Welches ist die kleinste/größte Zahl zu der du eine Summe im Kakuro findest?
Ein Zusatzangebot anderer Art wäre der Versuch, selbst Kakuros zu entwerfen und diese den Mitschülern zur Lösung anzubieten.
Außerdem: Das Kakuro Spiel, Das Kopfrechnen Sudoku, für 1-4 Spieler ab 9 Jahren,
Spieldauer 40 Minuten, Identity Games, Artikel Nummer: 4003930023244,
Californian Products, Prof.-Rüsche-Str. 10, 57489 Drolshagen – Bleche.

Quelle: o.A. (2007): Kakuro - Rätselspaß für Kinder ab 10. TB Band 2688. Würzburg: Arena.

K 7 Kakuros Name:

Kakuros zur Differenzierung

Schwierigkeitsstufen: L = leicht, M = mittel, S = schwer

KAKURO M2	16	17		16	5
17			3 / 15		
34					
	3	3 / 7			3
15					
4			6		

KAKURO M3	9	15		23	8
17			3 / 14		
31					
	9	4 / 11			4
16					
17			5		

KAKURO S3	11	29	16		8	17	4
13				17			
19				11 / 17			
17			45 / 10			14	27
	10				16 / 23		
	16	20 / 7					
11				20			
23				16			

Lösungen zu den Kakuros

KAKURO L2	4	22	
3	1	2	27
8	3	1	4
	16 / 6	7	9
10	1	3	6
22	5	9	8

KAKURO S3	11	29	16		8	17	4
13	1	5	7	17	5	9	3
19	2	8	9	11 / 17	2	8	1
17	8	9	45 / 10	9	1	14	27
	10	7	1	2	16 / 23	7	9
	16	20 / 7	2	6	8	1	3
11	7	1	3	20	9	4	7
23	9	6	8	16	6	2	8

KAKURO M2	16	17		16	5
17	9	8	3 / 15	2	1
34	7	9	8	6	4
	3	3 / 7	2	1	3
15	2	4	5	3	1
4	1	3	6	4	2

KAKURO M3	9	15		23	8
17	8	9	3 / 14	2	1
31	1	6	9	8	7
	9	4 / 11	1	3	4
16	1	2	4	6	3
17	8	9	5	4	1

Eine Auswahl an Literatur und Arbeitsmitteln zur Leitidee Zahl für das Lernen im individualisierten Mathematikunterricht

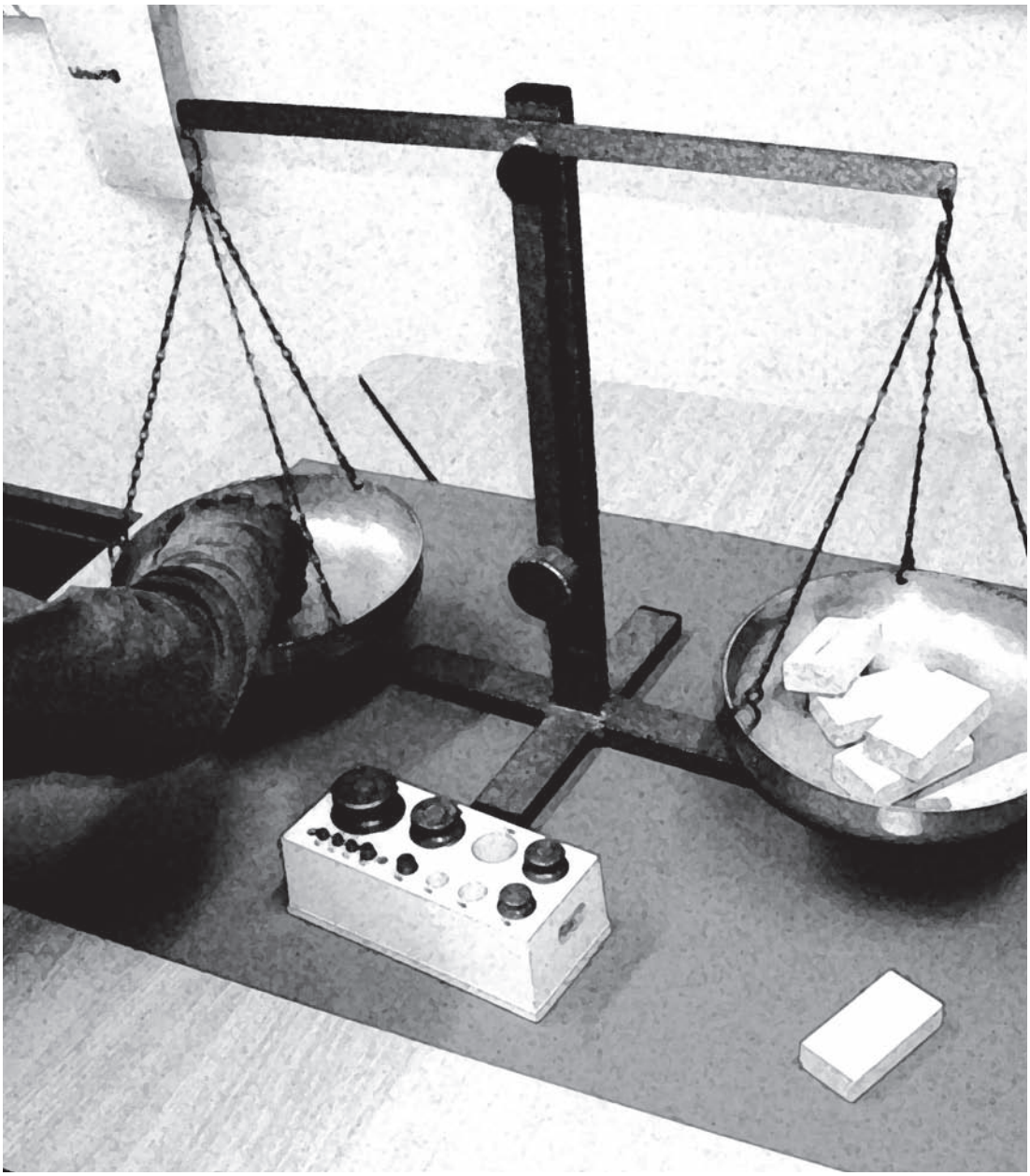
Böhmer, J.P. (2005): Mathe-Ass. Materialien für leistungsstarke Kinder in der Grundschule. Auer Verlag, S.15-57
Breiter, R. (2008): Entdeckerkartei 2, Flex und Flo. Diesterweg Verlag, Karte 1 A bis 9 G
Fuchs, M. / Käpnick, F. (2007): Knobel-Kalender. Mathe für kleine Asse. Volk und Wissen Verlag.
Grassmann, M. (2005): Knobeln mit Einstein 3 / 4 (1/2). Schroedel Verlag. S. 1-29
Grassmann, M. (2009): Erkennen und Fördern mathematisch begabter Kinder. Anregungen und Erfahrungen aus einem Münsteraner Projekt. Westermann Verlag
Hatt, W. (2007): Mathe-Stars 2. Knobel- und Sachaufgaben. Oldenbourg Verlag, S. 4, 6, 14, 26, 30, 46, 52
Hany, E. (2000): Muss man unterschiedlich hochbegabte Kinder unterschiedlich fördern? In H. Wagner: Begabung und Leistung in der Schule. Modelle der Begabtenförderung in Theorie und Praxis. Beck Verlag
Hatt, W. (2007): Mathe-Stars 3. Knobel- und Sachaufgaben. Oldenbourg Verlag, S. 6, 16-18, 22, 28, 30, 32, 36, 40, 53, 58
Hengartner, E. (2006): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Klett Verlag. S. 27-215
Hoppius, C. (2008): Mathe-Detektive entdecken Muster und Strukturen. Zahlenketten, Zahlenmauern, Spiegelaufgaben. Auer Verlag
Käpnick, F. (Hrsg. 2006): Mathe für kleine Asse. Klasse 5 / 6, (1 / 2), (3 / 4) Cornelsen Verlag
Lack, C. (2008): Forderheft 3. Denken und Rechnen. Westermann Verlag. S. 1-36, 42-45, 51-52
Lack, C. (2008): Forderheft 4. Denken und Rechnen. Westermann Verlag. S. 1-22, 24-27, 31-45,
Lorenz, J. H. (Hrsg. 2006): Knobelbox 1 / 2. Westermann Verlag, Karte 1-26
Lorenz, J. H. (Hrsg. 2006): Knobelbox 3 / 4. Westermann Verlag , Karte 1-32
Mosel-Göbel, D. (Hrsg.): Forscherheft Mathematik 1./2. Schj. Diesterweg Verlag. S. 1-14; 23-34
Nolte, M. (2004.): Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs und Förder Projekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter. Franzbecker Verlag
Rinkens, H.-D. (Hrsg. 2000): Knobeln und Entdecken. Aufgaben für leistungsstarke Kinder. 3./4. Schuljahr. Schroedel Verlag. S. 4-13; 40-48
Walther, G. u.a. (2008): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Cornelsen Verlag. S. 66-84

2 Leitidee Messen

Die Auseinandersetzung mit dem Kompetenzbereich Größen und Messen fördert das Verständnis der Kinder für die sie umgebende physikalische Welt. Die hier erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten können den Schülern eine direkte Hilfe zum Umgang mit ihrer Lebenswelt sein.

Die Kinder erwerben und vertiefen dabei:

- Wissen über die Größenbereiche (Länge, Geldwert, Zeit/Zeitspannen, Masse/Gewicht sowie Flächen- und Rauminhalte) und ihre Repräsentanten, Bezeichnungen und Relationen,
- Fähigkeiten in Bezug auf das Messen und das Schätzen von und Rechnen mit Größen sowie die Klassifizierung von Messinstrumenten,
- Vorstellung über Größen im Sinne von Stützpunktvorstellungen (Peter-Koop/Nührenbörger in Walther 2008).



2.1 Hinz und Kunz brauchen Wasser

Du hast ein 5- Liter-Gefäß und ein 3-Liter-Gefäß.
An keinem der beiden Gefäße ist eine Markierung zum Abmessen von kleineren Mengen.
Du kannst also wirklich bloß genau 5 Liter mit dem einen und genau 3 Liter mit dem anderen Gefäß abmessen.
Außerdem steht reichlich Wasser in einem großen Fass zur Verfügung.

a) Hinz braucht dringend 4 Liter Wasser. Kannst du ihm behilflich sein?
b) Kunz braucht genau einen Liter Wasser. Hilf auch Kunz.

Stelle deinen Lösungsweg übersichtlich dar.

Worum geht es?

Diese Aufgabe kann durch Handeln gelöst werden. Sie spricht deshalb in der Regel viele Kinder in der Klasse an. Durch wiederholtes Umfüllen und die Diskussion über die bereits gemachten und über die nächsten Schritte tasten sich die Schüler an eine Lösung heran.

Was soll geübt werden?

Zunächst wird der sichere Umgang mit Wasser und mit den Gefäßen geübt. Außerdem schult die Aufgabe das kombinatorische Denken. Wie bei verschiedenen anderen Problemen, muss auch hier zwischen unterschiedlichen Repräsentationsebenen gewechselt werden. Ein Schwerpunkt sollte auf die nachvollziehbare Darstellung des Lösungsweges gelegt werden, etwa in Form einer Tabelle oder von Pfeilbildern.

Was wird benötigt?

Neben dem Aufgabenblatt werden verschieden große Gefäße benötigt, damit die Kinder das Umfüllen ausprobieren können. Außer den in der Aufgabe genannten 3-Liter- und 5-Liter- Krügen sollten auch andere Größen vorhanden sein, um Variationen der Fragestellung erproben zu können.

Wie kann man vorgehen?

Da die Fragestellung selbst leicht verständlich ist, können sich die Kinder meist schnell an das Finden einer Lösung machen. Dazu empfiehlt es sich, in Gruppen arbeiten zu lassen. Das hat den Vorteil, dass die Anzahl der bereitzustellenden Gefäße nicht zu groß wird. Außerdem werden die Kinder schnell über die verschiedenen Schritte hin zur Lösung ins Gespräch kommen. Wichtig ist hier, dass die Kinder die Arbeit in Gruppen kennen, damit es nicht zu Streit um die Gefäße und zu nassen Kindern kommt. Da Pannen beim Umfüllen unvermeidlich sind, empfiehlt es sich, die Arbeit an der Aufgabe nach draußen zu verlegen, auch wenn dort beim Aufschreiben des Lösungsweges improvisiert werden muss.

TIPP: Die Denkschule vom Klett-Verlag enthält Material, das das Umfüllen auch ohne Wasser veranschaulicht, eine in der Klasse besser handhabbare, wenn auch weniger spannende Alternative.

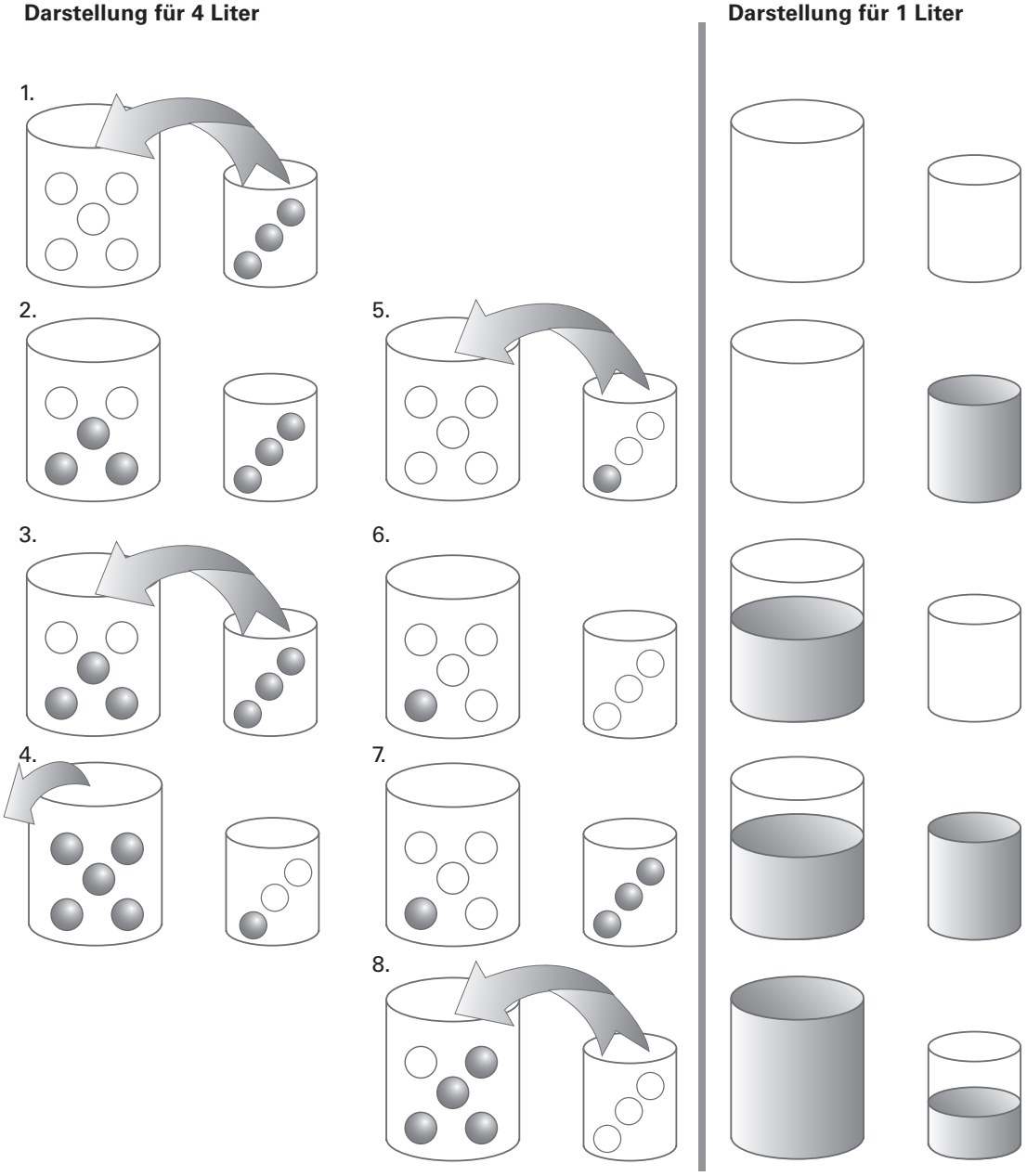
Nach einigen Versuchen werden die Schüler eine Lösung des Problems gefunden haben.
Einige werden dabei sicher bemerkt haben, dass die Lösung von Aufgabe b) ein Teil der Lösung von a) ist.
Die eigentliche Herausforderung ist dann die übersichtliche und nachvollziehbare Darstellung der Lösung. Dazu wird wieder in der Klasse gearbeitet. Hier steht am besten eine Wanne mit Wasser und je eins der benötigten Gefäße zur Verfügung, um die einzelnen Umfüll-Schritte beliebig oft wiederholen zu können.

Bevor nun eine gemeinsame Darstellung der Lösung erarbeitet wird, sollten die Schüler aufgefordert werden, sich selbst eine Darstellungsform zu überlegen.
Sollten die Schüler mit dieser Aufgabe überfordert sein oder wenn sich herausstellt, dass die Darstellungen, die die Kinder gewählt haben ungeeignet sind, kann der Lehrer Hilfen an die Hand geben.

Eine Form der Darstellung ist eine Tabelle

Arbeitsschritt	5l Krug	3l Krug	Wanne
1	leer	voll	
2	3 Liter	leer	
3	3 Liter	voll	
4	5 Liter	1 Liter	
5	leer	1 Liter	5 Liter
6	1 Liter	leer	
7	1 Liter	3 Liter	
8	4 Liter	leer	

Zwei weitere Formen der Darstellung sind auf der nächsten Seite abgebildet.



Wie könnte es weitergehen?

Umfüllaufgaben gibt es in vielen verschiedenen Variationen. In der Regel unterscheiden sie sich lediglich in der Anzahl und/oder in der Größe der Gefäße bzw. in der abzumessenden Menge. Zwei Beispiele finden sich in: Friedhelm Käpnick: Mathe für kleine Asse, Klasse 3/4. Dort werden auch eine andere Tabelle sowie eine Pfeildarstellung zur Veranschaulichung des Lösungswegs erläutert.
Alternativ zur Arbeit mit vorgegebenen Aufgaben können die Kinder aufgefordert werden, sich selbst Umfüllaufgaben auszudenken. Reizvoll kann auch die Beschäftigung mit unlösbaren Umfüllaufgaben sein. Dabei geht es darum, zu begründen, warum es keine Lösung geben kann.

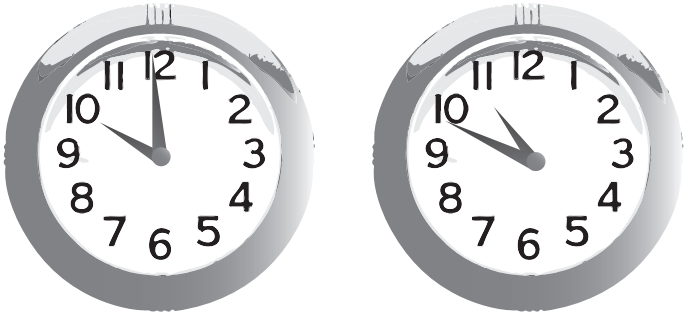
Quelle: Bardy, P. /Hrzán, J. (2005): Aulis Schatztruhe für die Grundschule – Aufgaben für kleine Mathematiker – mit ausführlichen Lösungen und didaktischen Hinweisen, S. 37.
Köln: Aulis Verlag Deubner.

2.2 Uhrenvergleich

Uhrenvergleich

Genau um Null-Uhr in der Silvesternacht
stellt Florian seine beiden Uhren.
Am nächsten Vormittag stellt er fest, dass die eine Uhr genau,
die andere aber pro Stunde fünf Minuten vor geht.

Um 10.00 Uhr sahen die beiden Uhren so aus:



Die linke Uhr zeigt 10:00 Uhr, die rechte Uhr 10:50 Uhr!
Wie viel Zeit vergeht, bis beide Uhren wieder gleichzeitig
die gleiche Uhrzeit anzeigen?

Worum geht es?

Bei dieser Aufgabe müssen die Kinder erkennen, welche Auswirkungen die Veränderung bei dem einen Gegenstand, in diesem Fall die erste Uhr, auf den anderen Gegenstand, die zweite Uhr hat (funktionaler Zusammenhang). Eine Schwierigkeit bei der Bearbeitung der Aufgabe besteht für viele Schüler darin, dass die Uhrzeit nur zum Teil im Dezimalsystem angegeben wird.

Was soll geübt werden?

Zur Lösung der Aufgabe müssen die Schüler Uhrzeiten sicher ablesen und einstellen können. Sie üben das Rechnen mit Stunden und Minuten. Sie setzen sich mit verschiedenen Lösungsstrategien auseinander und üben deren Anwendung. Bei der Arbeit in Gruppen sowie der Vorstellung der eigenen Lösung und des dazugehörigen Lösungsweges werden die kommunikativen Fähigkeiten, das Argumentieren und das Begründen geschult.

Was wird benötigt?

Um sich die Veränderungen der zweiten Uhr im Vergleich zur ersten zu veranschaulichen, sind Uhren aus Kunststoff oder Pappe hilfreich, an denen die Kinder die Zeiten einstellen können. Eine oder zwei große Uhren für die Tafel erleichtern die Erläuterung der Aufgabenstellung zu Beginn und die Darstellung der Lösungen am Ende der Arbeit.

Wie kann man vorgehen?

Zunächst wird die Aufgabe gemeinsam gelesen und offene Fragen werden geklärt. Um zu verdeutlichen, was mit dem fünfminütigen Vorgehen der zweiten Uhr gemeint ist, kann der Lehrer oder noch besser ein Schüler an einer großen Uhr an der Tafel zeigen, was beide Uhren eine Stunde, zwei Stunden und drei Stunden nach Mitternacht anzeigen.
Wenn die Aufgabenstellung klar ist, sollen die Schüler zunächst allein oder in kleinen Gruppen versuchen eine Lösung zu finden. Ist eine Lösung gefunden, geht es darum, sich eine Darstellung der Lösung zu überlegen.

Etwa in Form einer Tabelle:

nach	richtig gehende Uhr	schnellere Uhr
1 Std.	1.00	1.05
2 Std.	2.00	2.10
3 Std.	3.00	3.15
4 Std.	4.00	4.20
5 Std.	5.00	5.25
usw.		
12 Std.	12.00	1.00
usw.		
24 Std. (1 Tag)	0.00	2.00
2 Tage	0.00	4.00
3 Tage	0.00	6.00
4 Tage	0.00	8.00
5 Tage	0.00	10.00
6 Tage	0.00	12.00

Nach sechs Tagen zeigen also beide Uhren die gleiche Zeit an.
Da die Uhrzeit mit 10.00 Uhr vorgegeben ist: 6 Tage – 10 Std. = 5 Tage 14 Std.

Möglicherweise finden einzelne Kinder oder Gruppen andere Formen der Darstellung, diese sind ebenfalls zulässig, wenn sie für andere verständlich und nachvollziehbar sind.

TIPP: Folgende Hilfen können sinnvoll sein:

- Beide Uhren starten bei 0.00 Uhr.
- Lernuhren zum Hantieren / als Anschauungshilfen bereitstellen.
- 1 Tag = 24 Stunden
- Lege eine Tabelle an. (stündlicher Uhrenvergleich)

Wie kann es weitergehen?

- Wie sehen die Uhren um 12 Uhr Mittags aus? (AB I)
- Welche Uhrzeit zeigt die „falsche“ Uhr nach 1,2,3,... Stunden ?
- Wie viele Minuten ist die eine Uhr nach ... Stunden schneller als die andere?
- Andere Abweichungen vorgeben (zu schnell / zu langsam).
- Eine Uhr geht jeden Tag eine Stunde vor. Nach wie viel Tagen...
- Andere Abweichungen auch in anderen Einheiten vorgeben.
- Die Uhr geht 10 Minuten am Tag vor.
- Eine teilweise ausgefüllte Tabelle zur Verfügung stellen:

vergangene Zeit	erste Uhr	zweite Uhr	So viel geht die zweite Uhr vor
1 Std.	1.00	1.05	5 Min
2 Std.		2.10	
	3.00		
			30 Min
12 Std.			

- Was passiert, wenn die zweite Uhr 5 Minuten pro Stunde nachgeht?
- Mit welcher Abweichung treffen sich die beiden Uhren nie?
- Aufgabe mit digitaler Uhr (Anzeige von 0:00 bis 23:59 Uhr)(ABIII).

Quelle: Betz, B. u. a. (2006): Oldenbourg – Kopierbibliothek – Knobelaufgaben, S. 39. München: Oldenbourg Schulbuchverlag.

2.3 Bilder mit Mathematik

Bilder mit Mathematik I

Modellieren im Umgang mit Größen

Große Schuhe

Diese Riesenschuhe standen vor einem Geschäft in Malakka (Malaysia).

a) Wie groß wäre wohl eine Person, der diese Schuhe passen?

b) Welche Schuhgröße haben diese Schuhe etwa?

Worum geht es?

Bei dieser Aufgabe geht es in erster Linie um das mathematische Modellieren. Um ein reales Problem zu lösen wird ein mathematisches Modell entwickelt. Die mathematische Lösung lässt dann wieder Rückschlüsse auf die reale Problemstellung zu. Die hier gezeigte Aufgabe wird auch als Fermi-Problem bezeichnet, benannt nach dem italienischen Physiker und Nobelpreisträger Enrico Fermi (1901-1954). Dabei handelt es sich um komplexe Probleme, für deren Lösung die Schüler sinnvolle Annahmen formulieren und Daten sammeln müssen, die zur Lösung beitragen. Die Lösung selbst bleibt eine individuelle und wird durch abschätzen und überschlagen gewonnen.

Was soll geübt werden?

Die Schüler üben das mathematische Modellieren. Sie müssen Größen messen und abschätzen und dabei auf eigene Erfahrungen zurückgreifen. Sie gehen mit Messinstrumenten um, nutzen Maßstäbe, setzen Größen in Relation zu einander, lösen Aufgaben zum funktionalen Zusammenhang und müssen ihre Ergebnisse kritisch prüfen und diskutieren.

Was wird benötigt?

Neben dem Foto, das für die gemeinsame Arbeit vergrößert vorliegen sollte, werden Schuhe in unterschiedlicher Größe, verschiedene Zeitungen sowie Maßbänder oder Zollstöcke gebraucht. Wenn man sie nicht mit den Kindern herstellen will, sollte man auch noch eine Umrechnungstabelle Schuhgröße-Fußlänge zur Hand haben.

Wie kann man vorgehen?

Zunächst bekommen die Schüler die Gelegenheit das Bild in Ruhe zu betrachten und sich dazu zu äußern. Sicherlich fallen vielen Kindern die großen Schuhe auf, sodass der Lehrer wenig Mühe hat, die Aufmerksamkeit darauf zu lenken.
Die Frage: Wie groß wäre wohl eine Person, der diese Schuhe passen? soll dann von den Kindern zunächst spontan beantwortet werden. Anschließend wird gemeinsam überlegt, wie die Vermutungen überprüft werden können.
Ein Messen der Schuhe auf dem Foto sollte auf Grund der verzerrenden Perspektive ausgeschlossen werden. Stattdessen nähern sich die Schüler durch abschätzen und vergleichen der Lösung.
Eine Möglichkeit besteht darin von der Größe der Frau auszugehen. Ihre anzunehmende Größe wird mit der der Schüler verglichen. Davon ausgehend wird auf die Länge der Schuhe der Frau geschlossen und abgeschätzt, wie oft diese in die Länge der großen Schuhe passen. Passen sie fünfmal in die großen Schuhe, ist die Person, der die großen Schuhe passen würden etwa fünfmal so groß wie die Frau auf dem Bild.
Ein anderer Weg führt über die Bilder/Zeitungen, die auf dem linken Schuh zu sehen sind. Die Schüler vergleichen die Zeitung auf dem Bild mit realen Zeitungen. Wenn sie der Meinung sind, die abgebildete Zeitung entspricht in ihrer Länge z.B. der Hamburger Morgenpost, müssen sie nun abschätzen, wie oft die Zeitung auf dem Bild hintereinander gelegt in den großen Schuh passen würde. Anschließend wird mit Hilfe der realen Zeitung die Schuhlänge ermittelt und mit der eigenen Schuhlänge in Relation gesetzt. Mit diesem Ergebnis und dem Wissen über die eigene Körpergröße kann dann die Größe der fiktiven Person ermittelt werden.
Die Ergebnisse der Kinder können bei dieser Aufgabe sehr unterschiedlich sein, je nachdem welcher Lösungsweg eingeschlagen wird und wie genau abgeschätzt wurde. Viele Schülerergebnisse liegen im Bereich von 5,50 und 7,50 Metern.
Die Aufgabe des Lehrers ist hier, deutlich zu machen, dass eine gewisse Streuung der Ergebnisse völlig in Ordnung ist und dass kein exaktes Ergebnis zu ermitteln ist. Auch geht es darum, die Gründe für die unterschiedlichen Ergebnisse zu ermitteln und zu diskutieren sowie darum, extrem abweichende Lösungen in Frage zu stellen.
Bei der Frage nach der Schuhgröße kann entweder eine Schuhgrößentabelle aus einem Schuhgeschäft herangezogen werden oder mit Hilfe der Schuhgrößen der Schüler eine eigene Tabelle entwickelt werden. Dabei muss deutlich werden, dass die Schuhgröße nicht der Schuh- bzw. Fußlänge entspricht. Mit Hilfe der Tabelle kann dann abgeschätzt werden, welcher Schuhgröße die im ersten Aufgabenteil ermittelte Schuhlänge der großen Schuhe entspricht.

Wie kann es weiter gehen?

Auf der nächsten Seite sind zwei weitere Bilder, die Ausgangspunkt für eine Aufgabenstellung zum mathematischen Modellieren sein können.
Der Artikel Der Riesenfuß im Rasen in der Grundschulzeitschrift 141/2001, S. 12 ff bietet Anregungen für ein fächerübergreifendes Projekt zu diesem Thema.
Weitere Anregungen zur Arbeit mit Fermi-Problemen in der Grundschule liefert Andrea Peter-Koop in ihrem Aufsatz „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?“ – Modellbildungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Problemen in Kleingruppen, in: Ruwisch, S./ Peter-Koop, A.: Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule.
Eine Fülle unterschiedlicher Fermi-Aufgaben sind in der Fermi-Box vom Friedrich-Verlag gesammelt. Auch wenn die Box ursprünglich für die Klassenstufen 5./6. entwickelt wurde, sind viele der Aufgaben auch in der Grundschule einsetzbar.

Quelle: Vernay, R. (2007): Bilder mit Mathe. Stumme Impulse zum Modellieren und Argumentieren. In : Mathematik lehren 145, S. 10-13. Seelze: Friedrich Verlag.

Bilder mit Mathematik II Modellieren im Umgang mit Größen

Ziemlich viele Eiskugeln

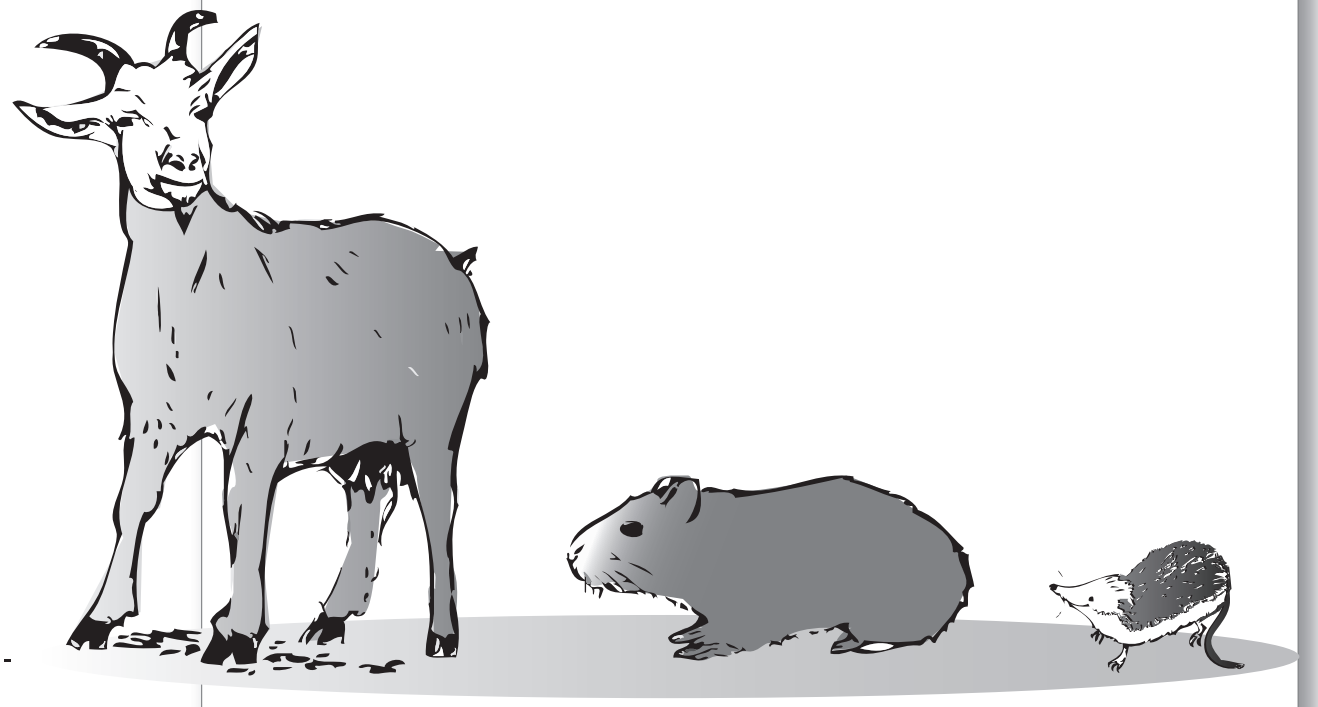
a) Nimm mal an, du füllst diese Eistüte mit normal großen Eiskugeln.
b) Wie viele Eiskugeln passen hinein?

Bilder mit Mathematik III Modellieren im Umgang mit Größen

Kleine Stühle

a) Wie groß wäre eine Person, die auf den Puppenstühlen sitzen könnte
b) In welchem Maßstab wäre die Person verkleinert?

2.4 Tiere für den Streichelzoo



Die Aufgabe

Für den Streichelzoo der Schule sollen für 100 Euro neue Tiere gekauft werden.
Eine Ziege soll 10 Euro kosten, jedes Meerschweinchen 3 Euro und jede Spitzmaus einen 50 Cent.

Von allen Tieren kauft die Schulleiterin mindestens ein Tier.

Sie gibt genau 100 Euro aus und kauft dafür genau 100 Tiere.

Wie viel Stück hat sie von jeder Art gekauft?

Worum geht es?

Die Aufgabe erscheint im ersten Moment vergleichbar mit bekannten Kombinatorikaufgaben wie: Im Stall sind ... Tiere (Fliegen, Enten und Kühe), sie haben zusammen ... Beine. Die besondere Schwierigkeit besteht hier darin, dass die Auswirkungen, die sich durch den Austausch einzelner Tiere ergeben, nicht so leicht zu durchschauen sind wie bei den Stallaufgaben. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass es für diese Aufgabe nur eine richtige Lösung gibt.

Was soll geübt werden?

Bei der Bearbeitung der Aufgabe werden Addition und Subtraktion als auch die Multiplikation geübt (AB I). Darüber hinaus müssen Lösungsstrategien gefunden und erprobt werden. Bereits gefundene Kombinationen müssen immer wieder mit den Ausgangsbedingungen verglichen werden (AB II). Schließlich geht es darum, zu erkennen, welche Auswirkungen der Austausch einzelner Tiere bei einer gefundenen Teillösung hat (AB III).

Was wird benötigt?

Neben dem Aufgabenblatt, einem Heft und Stiften können Karten mit den Tiersymbolen darauf und Rechengeld hilfreich zur Veranschaulichung sein. Zur Präsentation der Ergebnisse sind vorbereitete Karten sinnvoll, auf denen die Schüler ihre (Teil-) Lösungen notieren.

Beispiel:

	Ziegen	Meerschweinchen	Spitzmäuse	gesamt
Anzahl	**5**	**5**	**70**	**80**
Euro	**50**	**15**	**35**	**100**

Wie kann man vorgehen?

Das Thema der Aufgabe spricht die Kinder zunächst emotional an. Einige haben selbst Haustiere, wünschen sich eins oder haben andere Erfahrungen mit Tieren oder Erlebnisse aus einem Streichelzoo, die sie den anderen mitteilen wollen. Darüber wird zunächst gesprochen.

Anschließend wird die Aufgabenstellung mit allen besprochen und die Kinder bekommen in einer ersten Arbeitsphase Zeit Lösungsideen zu entwickeln. Dabei ist es wichtig, dass alle Lösungsversuche notiert werden und nichts radiert wird, da mit Hilfe von Teillösungen eine Annäherung an das Ergebnis erreicht werden kann.
Bei ihren Lösungen orientieren sich die Schüler in der Regel zunächst an der Anzahl der Tiere oder am Gesamtpreis und finden so Teilergebnisse, die bereits eine oder zwei Bedingungen erfüllen.

Beispiele:

70 Spitzmäuse, 25 Meerschweinchen und 5 Ziegen = 100 Tiere
(Gesamtpreis: 160 Euro) oder
100 Spitzmäuse, 10 Meerschweinchen und 2 Ziegen kosten zusammen 100 Euro
(Gesamtzahl: 112 Tiere).

TIPP: Faktoren, die die Lösung bedingen, werden von Kindern während der Arbeit selbst entdeckt oder werden vom Lehrer eingebracht und mit allen besprochen.

Dazu gehören:

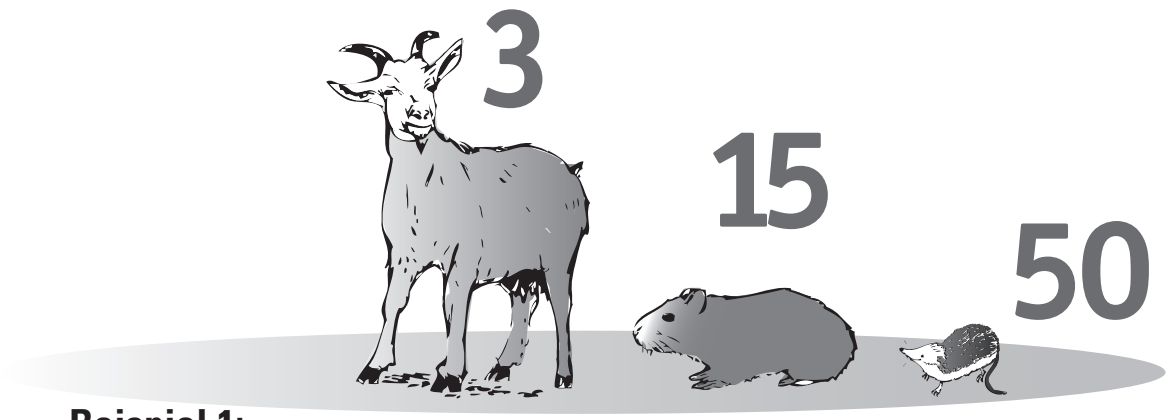
- die Anzahl der Ziegen kann nicht größer als 9 werden, da sonst kein Geld für die anderen Tiere bleibt,
- die Anzahl der Spitzmäuse muss gerade sein, da sonst keine glatten Eurobeträge erreicht werden können,
- der Betrag für die Spitzmäuse + der Betrag für die Meerschweinchen muss, wegen des Preises der Ziegen, eine glatte Zehnerzahl sein,
- 1 Meerschweinchen kostet soviel wie 6 Spitzmäuse, 1 Ziege soviel wie 20 Mäuse.

Nach der ersten Arbeitsphase der Kinder sollten die Lösungsansätze für alle visualisiert werden, um in einem nächsten Schritt vom einfachen Ausprobieren zu einem systematischen Verändern der Werte zu kommen.
Der anspruchsvollere Weg geht dabei über die fast richtigen Lösungen, die dann schrittweise verändert werden.

Nimmt man das zweite Beispiel von oben (100 Mäuse, 10 Meerschweinchen, 2 Ziegen), kann durch das Hinzunehmen von 2 Meerschweinchen auf Kosten von 12 Mäusen die Anzahl auf 102 reduziert werden. Ein weiterer Austausch von diesen Tierarten führt allerdings nicht zum gewünschten Ergebnis, sodass andere Varianten erprobt werden müssen. Dies kann sehr lange dauern und für die Kinder ist es dabei oft schwierig die Übersicht zu behalten.

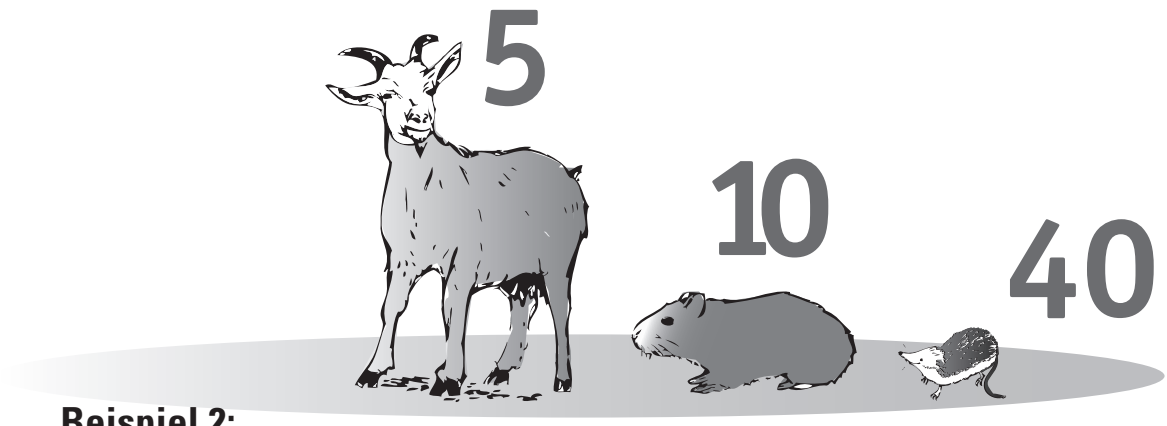
Einfacher ist es, wenn von einer festen Anzahl Ziegen ausgegangen wird, diese liegt zwischen 1und 9. Von den anderen Tieren werden so viele hinzugenommen, dass genau 100 Euro ausgegeben werden. Nun könnten Gruppen in der Klasse gebildet werden, die Lösungen mit 1, mit 2,..., mit 9 Ziegen suchen. Alternativ kann auch mit der ganzen Klasse gemeinsam an der Lösung gearbeitet werden.

Bei diesem Lösungsweg wird die Tatsache genutzt, dass der Preis für ein Meerschweinchen dem von 6 Spitzmäusen entspricht. Werden also Meerschweinchen gegen Mäuse getauscht, steigt oder fällt bei gleich bleibendem Preis die Anzahl der Tiere genau um 5. Mit diesem Wissen wird bald deutlich, dass nur bei 5 Ziegen die richtige Lösung gefunden werden kann, da nur in diesem Fall die Gesamtzahl der Tiere durch 5 teilbar ist. Dazu zwei Beispiele:



Beispiel 1:

3 Ziegen, 15 Meerschweinchen und 50 Spitzmäuse kosten 100 Euro. Zusammen sind es 68 Tiere. 68 ist nicht teilbar durch 5, d.h. durch einen Austausch von Meerschweinchen und Spitzmäusen komme ich nicht auf 100 Tiere bei 100 Euro.



Beispiel 2:

5 Ziegen, 10 Meerschweinchen und 40 Spitzmäuse kosten 100 Euro.
Zusammen sind es 55 Tiere.
Tausche ich nun 1 Meerschweinchen gegen 6 Spitzmäuse,
erhalte ich bei gleichem Preis 60 Tiere und komme so
schrittweise der richtigen Lösung näher.

Wie könnte es weitergehen?

Als Ergänzung können Fragen und Aufgaben gestellt werden wie:
Gibt es eine entsprechende Lösung mit einer anderen Zahl? (z.B. 120 Tiere für 120 Euro)
Warum gibt es keine Lösung für 50 Tiere zu 50 Euro?
Erfinde selbst eine ähnliche Aufgabe.

Quelle: Snape, Ch. / Scott, H. (1995): Mathematischer Zauberkasten, S.15. Stuttgart: Klett Verlag.

Eine Auswahl an Literatur und Arbeitsmitteln zur Leitidee Messen für das Lernen im individualisierten Mathematikunterricht

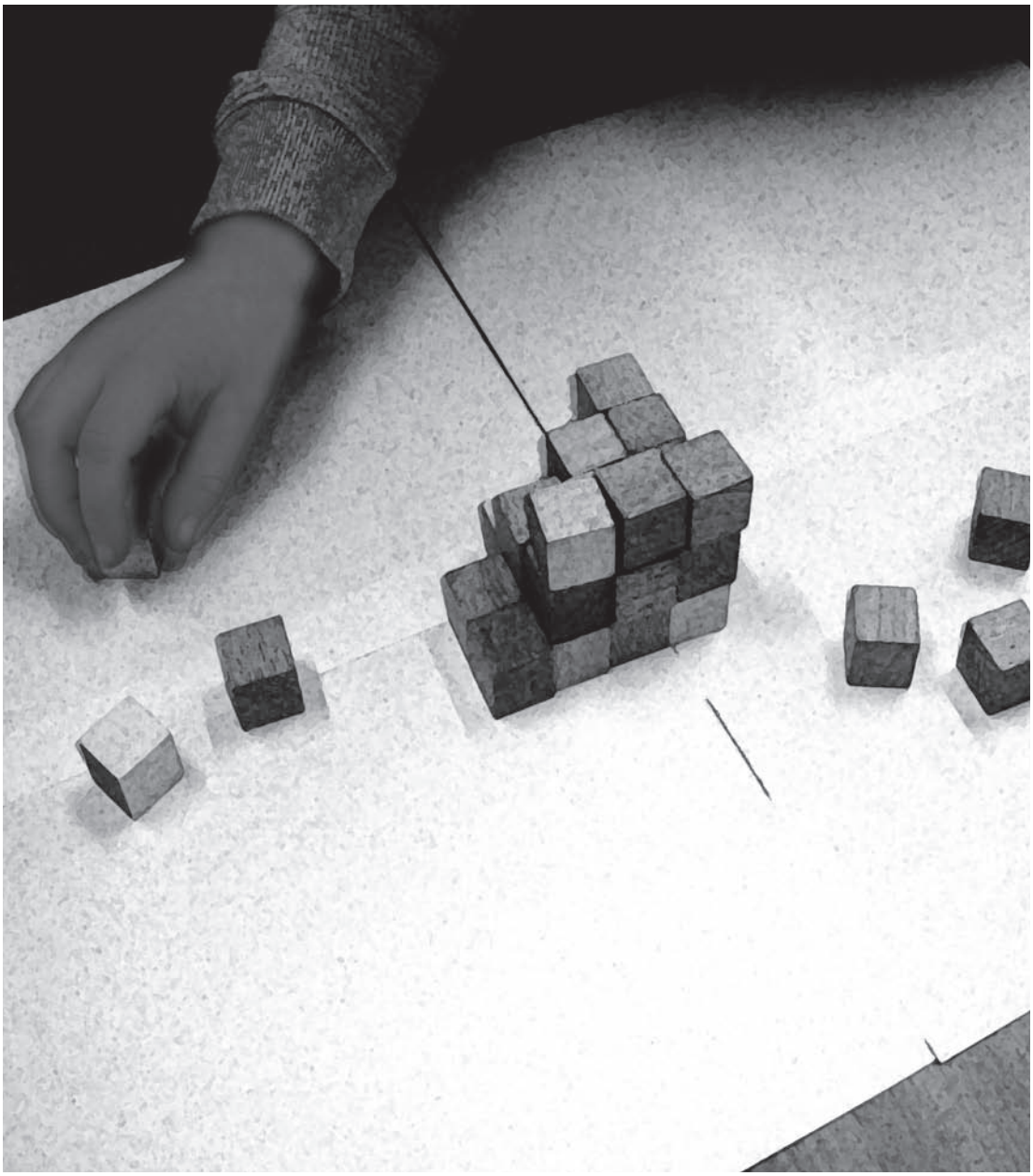
Böhmer, J.P. (2005): **Mathe-Ass.** Materialien für leistungsstarke Kinder in der Grundschule. Auer Verlag. S.32-34
Breiter, R. (2008): **Entdeckerkartei** 2, Flex und Flo. Diesterweg Verlag, Karte 17 A bis 18 D
Fuchs, M. / Käpnick, F. (2007): Knobel-Kalender. Mathe für kleine Asse. Volk und Wissen Verlag.
Hatt, W. (2007): Mathe-Stars 2. Knobel- und Sachaufgaben. Oldenbourg Verlag, S. 2, 10, 16-18, 24, 32,34-36, 50, 56, 58-59, 62
Hatt, W. (2007): Mathe-Stars 3. Knobel- und Sachaufgaben. Oldenbourg Verlag, S. 2, 24, 26, 42, 44, 48, 54, 62
Käpnick, F. (Hrsg. 2006): Mathe für kleine Asse. Klasse 5 / 6, (1 / 2), (3 / 4) Cornelsen Verlag
Lack, C. (2008): Forderheft 3. Denken und Rechnen. Westermann Verlag. S. 36-38, 53-58
Lack, C. (2008): Forderheft 4. Denken und Rechnen. Westermann Verlag. S. 48-53
Lorenz, J. H. (Hrsg. 2006): Knobelbox 1 / 2. Westermann Verlag, Karte 79-85
Lorenz, J. H. (Hrsg. 2006): Knobelbox 3 / 4. Westermann Verlag , Karte 73-82
Mosel-Göbel, D. (Hrsg.): Forscherheft Mathematik 1./2. Schj. Diesterweg Verlag. S. 44-46
Rinkens, H.-D. (Hrsg. 2000): Knobeln und Entdecken. Aufgaben für leistungsstarke Kinder. 3./4. Schuljahr. Schroedel Verlag. S. 24-33
Schweden, K.W. (2005): Mathe-mobil. Sachaufgaben. Rechnen-Knobeln-Kombinieren. Kl.3 / 4. Finken Verlag
Shapiro, S. (2006): Knifflige Mathematikaufgaben strategisch lösen. Ab Klasse 3. Edition MoPäd
Walther, G. u.a. (2008): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Cornelsen Verlag. S. 89-114

3 Leitidee Raum und Form

Der Kompetenzbereich Raum und Form beinhaltet:

- das Erkennen, Benennen und Darstellen zwei- und dreidimensionaler geometrischer Figuren und Abbildungen. Dabei geht es u.a. darum, geometrische Formen in der Umwelt zu erkennen, Figuren zu ordnen, zu beschreiben sowie Modelle von ihnen herzustellen und zu beschreiben, ebene Figuren verkleinert bzw. vergrößert darzustellen und auf Symmetrien hin zu untersuchen.

- das Messen und Vergleichen von Flächen- und Rauminhalten durch das Zerlegen und Vergleichen sowie die Untersuchung von Flächeninhalt und Umfang ebener Figuren und den Vergleich von Rauminhalten mit Hilfe von Einheitswürfeln. Darüber hinaus sollen die Kinder lernen sich im Raum zu orientieren, räumliche Beziehungen zu erkennen, (Bau-)Pläne zu lesen und zu erstellen und anhand dieser Pläne Bauwerke zu erstellen (vgl. Bildungsstandards 2005).



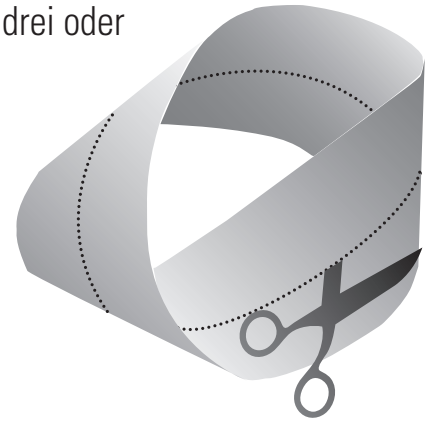
3.1 Das Möbiusband

Die Aufgabe

Klebe einen Papierstreifen mit einer halben Drehung zusammen.
Das heißt: Verdrehe den Streifen entlang der langen Kanten, so dass am linken Ende die vorherige Rückseite nach vorne schaut.
Dann klebe beide Enden zusammen. Das nennt man das Möbiusband.

Fragen:

- Wie viele Seiten hat ein Möbiusband?
- Wie viele Kanten hat ein Möbiusband?
- Was passiert, wenn du das Möbiusband entlang der Mitte aufschneidest?
- Was passiert, wenn die Bänder zwei, drei oder vier halbe Drehungen aufweisen?



Notiere deine Beobachtungen in der Tabelle.

Anzahl der halben Drehungen	Wie viele Seiten hat das Band?	Ergebnis eines Schnitts entlang der Mittellinie
0		
1 - das Möbiusband		

Worum geht es?

Das Möbiusband hat seinen Namen von dem Mathematiker Ferdinand August Möbius (1790-1868). Obwohl das Objekt als solches bereits bekannt war, hat Möbius es als einer der ersten auf seinen mathematischen Gehalt hin untersucht.
Die erste verblüffende Feststellung, die man bei der Untersuchung eines Möbiusbandes macht, ist die, dass der Papierstreifen, der zuvor 2 Kanten und 2 Seiten hatte, nach dem Verdrehen und Zusammenkleben nur noch eine Kante und eine Seite hat.
Beim in der Aufgabe beschriebenen Zerschneiden des Bandes erlebt man weitere Überraschungen.

Was soll geübt werden?

Neben den handwerklichen Fähigkeiten (Umgang mit Schere und Klebestift) wird das räumliche Vorstellungsvermögen geschult. Fachbegriffe wie Kante, Seite, Mittellinie werden in der Auseinandersetzung mit der Aufgabe ebenso geübt, wie das Aufstellen und Überprüfen von Hypothesen. Die Schüler üben zu argumentieren und zu kommunizieren.

Was wird benötigt?

Zur Herstellung der Möbiusbänder werden ca. 5 cm breite Papierstreifen in unterschiedlicher Länge benötigt. Für ein einfaches Möbiusband reichen ca. 30 cm lange Streifen, sollen die Bänder mehrfach gedreht werden, sind Längen von mindestens 50 cm besser. Daneben brauchen die Kinder Scheren, Klebestifte und Farbstifte. Die in der Aufgabe gezeigte Tabelle muss nicht gedruckt vorliegen. Die Kinder können sie auch ins Heft zeichnen.

Wie kann man vorgehen?

Um das Erstaunliche eines Möbiusbandes deutlich zu machen, sollten die Schüler zunächst einen Papierstreifen ganz normal (nicht gedreht) zu einem Ring zusammenkleben und beschreiben (Anzahl der Kanten...). Anschließend wird die Außenseite in einer Farbe angemalt und die Innenseite in einer anderen. Nun sollen die Schüler vermuten, was passiert, wenn das Band an der Mittellinie aufgeschnitten wird. Die Vermutungen werden dann praktisch überprüft.
Im zweiten Schritt wird ein Möbiusband hergestellt. Dabei muss der Lehrer sicher einigen Kindern helfen, die die richtige Drehung nicht allein schaffen. Nun wird wiederholt, was mit dem ersten Band gemacht wurde. Spätestens beim Färben der Seiten wird es zu großen Irritationen kommen. Derart verunsichert werden einige Schüler vielleicht nicht wie selbstverständlich annehmen, dass das Band beim Zerschneiden in zwei Teile zerfällt. Diese Vermutung gilt es anschließend zu überprüfen.
Statt beim Möbiusband die Seiten zu färben, können die Kinder mit einem Bleistift von einem gemalten Punkt starten. Beim normalen Band gehen sie außen herum, innen kommen sie nie an. Beim Möbiusband gehen sie einmal herum, überall ist der Strich zu sehen, also gibt es kein außen und innen.

Spannend ist es dann die Erklärungsversuche der Schüler für die überraschenden Eigenschaften des Möbiusbands zu hören und zu diskutieren. Dabei sollte der Lehrer den Kindern immer wieder den Herstellungsprozess ins Gedächtnis rufen.

TIPP: Hilfreich ist außerdem, die Ränder des Papierstreifens vor dem Zusammenkleben farbig anzumalen und nach dem Verkleben und Zerschneiden zu schauen, wie die Ränder nun aussehen.

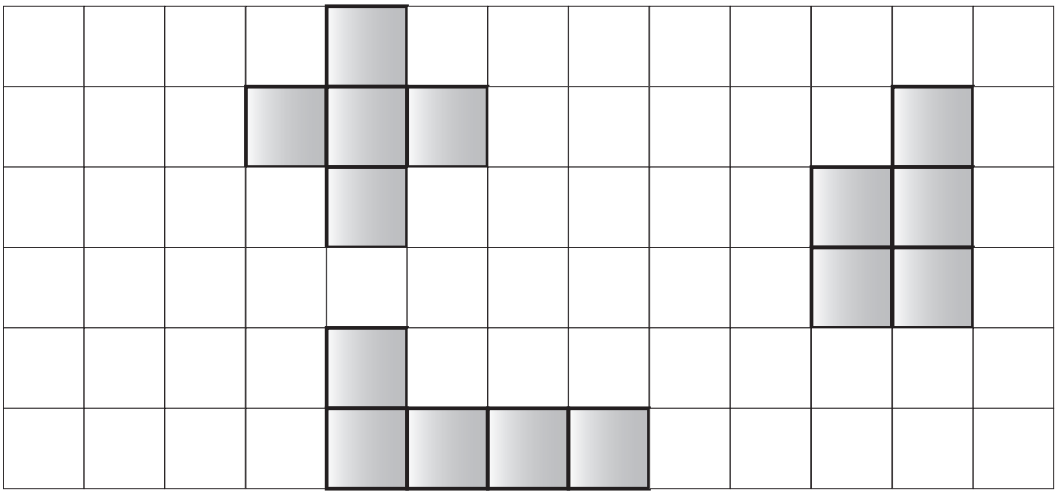
Wie kann es weiter gehen?

In der Aufgabe selbst ist die Beschäftigung mit mehrfach gedrehten Bändern als Zusatzaufgabe genannt. Auch dabei ist es wichtig, die Kinder dazu anzuhalten, vor dem praktischen Tun Vermutungen anzustellen und die zu erwartenden Ergebnisse möglichst genau zu beschreiben und zu begründen.
Eine andere Variation des Themas besteht darin das Möbiusband nicht genau in der Mitte aufzuschneiden. Stattdessen setzt man den Schnitt etwa ein Drittel der Breite vom linken oder rechten Rand an. Auch hier sollten vorher alle Ränder angemalt werden. Die Vermutungen der Schüler, was nach Ausführung des Schnittes passiert, werden selten zutreffen, zu überraschend ist das Ergebnis. Hat man aber erneut ganz zu Anfang eine Seite des Papierstreifens gefärbt, sind einige Kinder möglicherweise in der Lage, das Ergebnis im Nachhinein zu begründen.

Quelle: Beutelspacher, A./ Wagner, M (2008): Wie man durch eine Postkarte steigt und andere spannende mathematische Experimente, S. 77 ff. Freiburg: Herder Verlag.

3.2 Pentominos

Pentominos - Fünflinge



Die Aufgabe

Bilde aus Quadraten möglichst viele verschiedene Fünflinge.
Achte darauf, dass die Quadrate Seite an Seite aneinander liegen.
Gedrehte und gespiegelte Figuren zählen als eine Figur.

Zeichne deine Lösungen:

Zusatzaufgabe:

Bilde aus den Fünflingen systematisch die 35 Sechslinge.

Worum geht es?

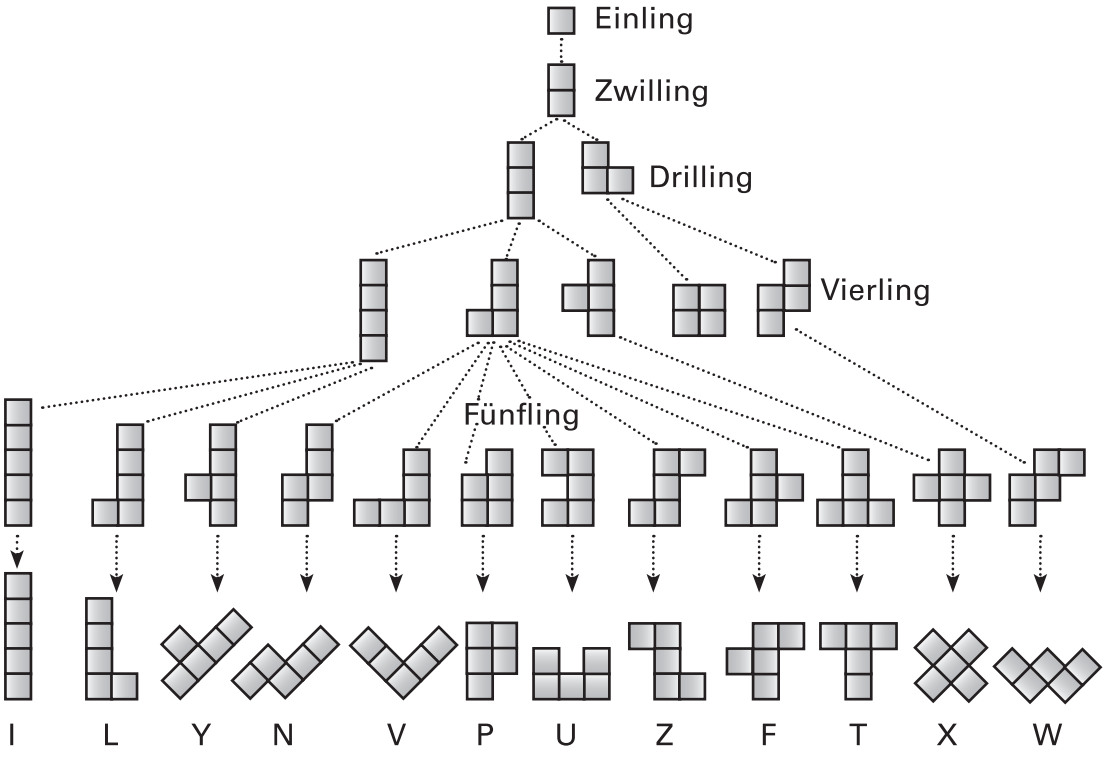
Pentominos (Fünflinge) sind ebene Figuren, die aus fünf Quadraten bestehen. Abgesehen von Drehungen und Spiegelungen gibt es genau zwölf verschiedene Pentominos. Zu Beginn ist es wichtig, dass deutlich gemacht wird, dass die Quadrate jeweils mit der ganzen Seite aneinander grenzen müssen. Ohne diese Einschränkung wäre die Anzahl der zu legenden Figuren nicht einzugrenzen.

Was soll geübt werden?

Bei der Auseinandersetzung mit dieser Aufgabe wird das räumliche Vorstellungsvermögen der Kinder geschult. Die Schüler machen vielfältige Erfahrungen zu Raum-Lage-Beziehungen und sie setzen sich mit Spiegelungen und Drehungen auseinander. Gleichzeitig werden die entsprechenden Fachbegriffe geübt sowie das Ordnen und Vergleichen verschiedener Lösungen.

Was wird benötigt?

Es gibt verschiedenes Material, das bei der Suche nach den unterschiedlichen Pentominos hilfreich sein kann. Am einfachsten ist es den Kindern quadratisches Papier (Faltpapier oder Zettelblöcke) zur Verfügung zu stellen. Die Kinder sollen dann unterschiedliche Fünflinge legen und mit Klebestreifen fixieren. Für die Übersichtlichkeit ist es sinnvoll für jeden Fünfling gleichfarbige Blätter zu nehmen.
Alternativ kann auch mit Geometriematerial wie Polydron oder Lokon gearbeitet werden. Dabei werden Fünflinge aus dem Material zusammengesteckt und dann, da das Material meist nicht in so großer Zahl vorhanden ist, abgezeichnet. Anschließend kann der nächste Fünfling gebaut werden.
Die Arbeit mit den Papiermodellen hat den Vorteil, dass schnell viele unterschiedliche Pentominos fertig sind. Diese können dann gemeinsam an der Tafel verglichen werden und doppelte (Spiegelungen und Drehungen) können aussortiert werden.
Im Handel gibt es Pentominos in unterschiedlichen Ausführungen, diese sind bei der Weiterarbeit besser handhabbar als die Modelle aus Papier.



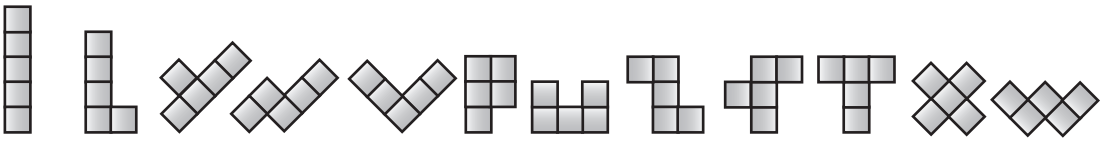
Wie kann man vorgehen?

Für die Suche nach allen zwölf Fünflingen werden nun zwei unterschiedliche Wege vorgestellt.
Der erste Weg beginnt damit, dass zunächst die Merkmale von Pentominos an einem Beispiel verdeutlicht werden. Pentominos bestehen aus fünf Quadraten, die sich jeweils mit mindestens einer ganzen Seite berühren. Anschließend bekommen die Kinder dann das Material und Zeit um möglichst alle weiteren Fünflinge zu finden.
Der zweite Weg beginnt mit der Suche nach allen Einlingen, Zwillingen, Drillingen und Vierlingen. Für die Kinder ist schnell einsichtig, dass es nur einen Einling und einen Zwilling geben kann. An den zwei Drillingen und den fünf Vierlingen kann man Spiegelungen und Drehungen einführen bzw. wiederholen und deutlich machen, warum diese keine neuen Figuren sind.
Die Pentominos können nun gefunden werden, indem jeder Vierling durch ein weiteres Quadrat ergänzt wird. Da es bei jedem Vierling mindestens acht Möglichkeiten gibt ein Quadrat anzusetzen, bietet sich hier das Arbeiten in Gruppen an (AB I). Am Ende wird eine Vielzahl von Fünflingen vorhanden sein. Nun gilt es die Figuren gemeinsam zu ordnen und die zwölf wesentlich verschiedenen zu finden. Dieser Prozess kann sehr langwierig sein, da es immer wieder Kinder gibt, die glauben eine neue Figur entdeckt zu haben und diese mit den vorhandenen Fünflingen überprüfen müssen (AB II).

TIPP: Je nach Leistungsstärke der Gruppe kann es sinnvoll sein, ab einem bestimmten Stadium der Arbeit den Kindern zu verraten, dass es genau zwölf Pentominos gibt.

Wie könnte es weiter gehen?

Die Arbeit mit Pentominos bietet vielfältige Möglichkeiten zum Entdecken und Erforschen von Mustern und Strukturen.
Die Fünflinge können zu größeren Formen (Quadrate, Rechtecke,...) zusammengesetzt werden. Wenn dafür nicht alle Fünflinge genutzt werden, ist es sinnvoll jedem Pentomino eine feste Bezeichnung zu geben. Häufig werden dafür Buchstaben genutzt, da die einzelnen Fünflinge wie stilisierte Buchstaben aussehen.



I L Y N V P U Z F T X W

Ebenso gut kann jede Figur eine eigne Farbe bekommen.
Wenn nun ein Schüler ein Rechteck aus drei Pentominos gelegt hat, kann er den anderen Kindern die Aufgabe stellen: Baue die Figur nach, benutze dazu das U, das P und das F (den roten, den gelben und den weißen Fünfling).
Alle zwölf Pentominos lassen sich auch lückenlos zu einem 6x10 Rechteck ergänzen. Dafür nur eine Lösung zu finden erfordert bereits einige Geduld und Durchhaltevermögen. Umso erstaunlicher ist es, dass es genau 2339 verschiedene Lösungen zu diesem Problem gibt.
Mit Hilfe von Pentominos können auch die Fachbegriffe Fläche und Umfang besprochen und deren Zusammenhang sehr gut erläutert werden (siehe Zahlenbuch 3, Lehrerhandbuch, S. 61/62).
Außerdem ist die Arbeit mit den Fünflingen ein idealer Ausgangspunkt zur Erarbeitung von Würfelnetzen.

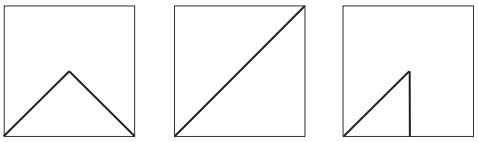
Quelle: Wittmann, E./Müller, G. N. (2005): Das Zahlenbuch 3, Lehrerhandbuch, S. 60/61. Stuttgart: Klett Verlag.

3.3 Knobel-Quadrate

Knobel-Quadrate

Zeichne auf einem quadratischen Papier vom Mittelpunkt aus zwei Strecken. Erlaubt sind Strecken, die zu den Eckpunkten oder zu den Seitenmittelpunkten führen.

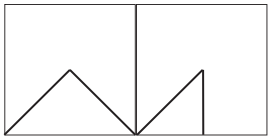
Beispiele:



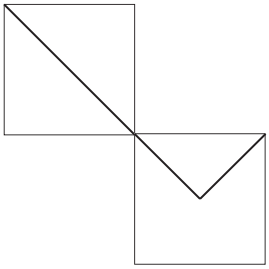
Aufgabe:
Finde alle acht verschiedenen Möglichkeiten!
Drehsymmetrische Quadrate sind nicht verschieden.

Forscheraufgabe: Lege aus den Quadratkarten einen Streckenzug (mit Anfang und Ende oder sogar geschlossen).
Finde verschiedene Möglichkeiten!
Die Karten dürfen dabei Seite an Seite oder Eckpunkt an Eckpunkt liegen.

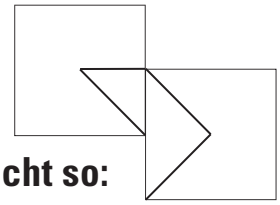
So:



oder so:



aber nicht so:



Worum geht es?

Bei dieser Aufgabe, im Rahmen der ebenen Geometrie, sollen auf eine vorgegebene Weise Strecken in ein Quadrat eingezeichnet werden. Die Anzahl der Lösungen wird dadurch begrenzt, dass nur wenige, festgelegte Verbindungen vom Mittelpunkt zum Rand zugelassen werden und Drehsymmetrien nicht als neue Lösung gelten.
Anschließend sollen die Einzelstrecken zu offenen bzw. geschlossenen Streckenzügen ergänzt werden.

Was soll geübt werden?

In der Auseinandersetzung mit dieser Aufgabe werden Fachbegriffe der ebenen Geometrie genutzt und eingeübt (Strecke, Mittelpunkt, Eckpunkt, Seitenmittelpunkt, Quadrat, Streckenzug). Die Schüler zeichnen mit dem Lineal, müssen die gefundenen Lösungen ordnen und vergleichen. Dabei vertiefen sie ihre Kenntnisse über Symmetrien und Drehungen. Wie bei anderen geometrischen Fragestellungen wird auch hier das räumliche Vorstellungsvermögen geschult.

Was wird benötigt?

Für die Schüler sollte quadratisches Papier in größerer Anzahl zur Verfügung stehen. Da der Mittelpunkt der Quadrate leicht durch Falten zu finden ist, ist es in der Regel nicht nötig, dass der Lehrer den Mittelpunkt der Quadrate vor Beginn der Arbeit kennzeichnet.

TIPP: Die Arbeit mit den Karten statt mit Arbeitsblättern auf denen Quadrate gezeichnet sind erleichtert den Vergleich der Lösungen.
Außerdem können die Karten anschließend für die Zusatzaufgabe genutzt werden.

Für die Arbeit mit den Vorlagen zum Auslegen eignen sich die Lösungen auf der nächsten Seite, da diese in ihrer Größe exakt passen.

Wie kann man vorgehen?

Zu Beginn wird die Aufgabe vorgestellt und es werden Verständnisfragen geklärt. Anschließend bekommen die Schüler quadratisches Papier ausgehändigt, bei dem sie zunächst den Mittelpunkt finden müssen und auf das sie dann die Strecken zeichnen (AB I). Sobald die meisten Kinder die acht unterschiedlichen Lösungen glauben gefunden zu haben bzw. sie keine weiteren Lösungen finden, wird gemeinsam geordnet und verglichen bis alle acht wesentlich verschiedene Lösungen gefunden sind (AB II). Anschließend stellen sich alle Kinder, denen noch Quadrate mit den entsprechenden Strecken fehlen, diese aus dem quadratischen Papier her oder die Schüler bekommen die fertigen Quadrate aus dem Zusatzmaterial.
Als Vorbereitung für die Forscheraufgabe muss zunächst geklärt werden, was ein Streckenzug ist und worin der Unterschied zwischen einem offenen und geschlossenen Streckenzug besteht. Dann können die Schüler versuchen verschiedene Streckenzüge zu legen (AB III).

Wie kann es weiter gehen?

Die Forscheraufgabe bietet weitere Möglichkeiten zur Differenzierung. Es kann nach geschlossenen Streckenzügen gesucht werden, bei denen eine festgelegte Anzahl der Karten (≤8) benutzt werden darf. Die Schüler können aufgefordert werden Streckenzüge zu finden, bei denen die Karten in einen festgelegten Rahmen passen müssen (siehe Kopiervorlagen K 8-11). Anschließend könnten die Kinder versuchen eigene Vorlagen zu entwickeln, auf die dann andere mit den Karten Streckenzüge legen müssen.

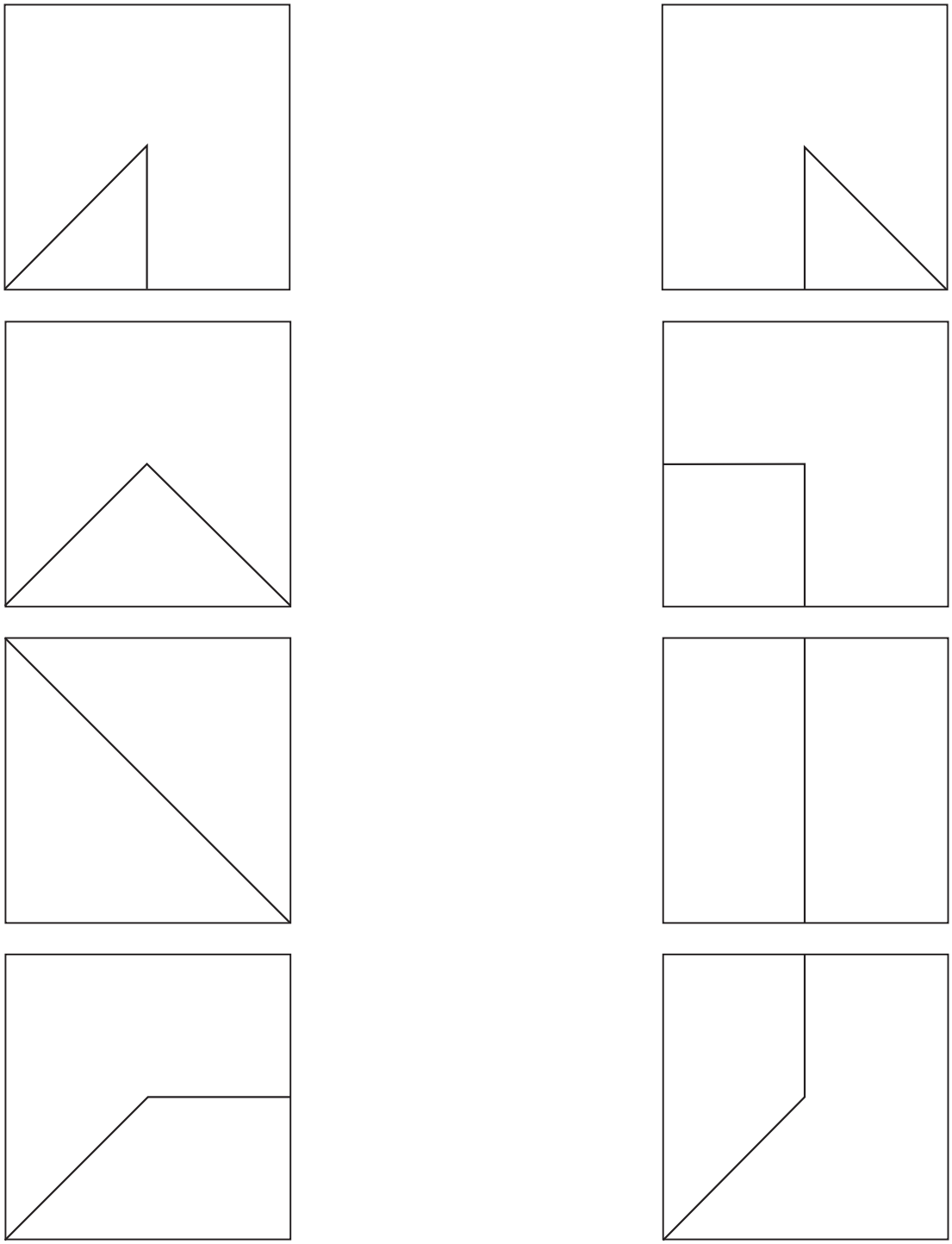
Quelle: Birnstengel-Höft, U./Feldhaus, A. (2007): Knobel-Quadrate.
In: Grundschule Mathematik, 14/2007, Seite 45. Seelze: E. Friedrich Verlag.

K8 Knobel-Quadrate

Name:

Lösungen

Diese acht Karten können ausgeschnitten werden und
zum Auslegen der Pläne auf den folgenden Seiten genutzt werden.



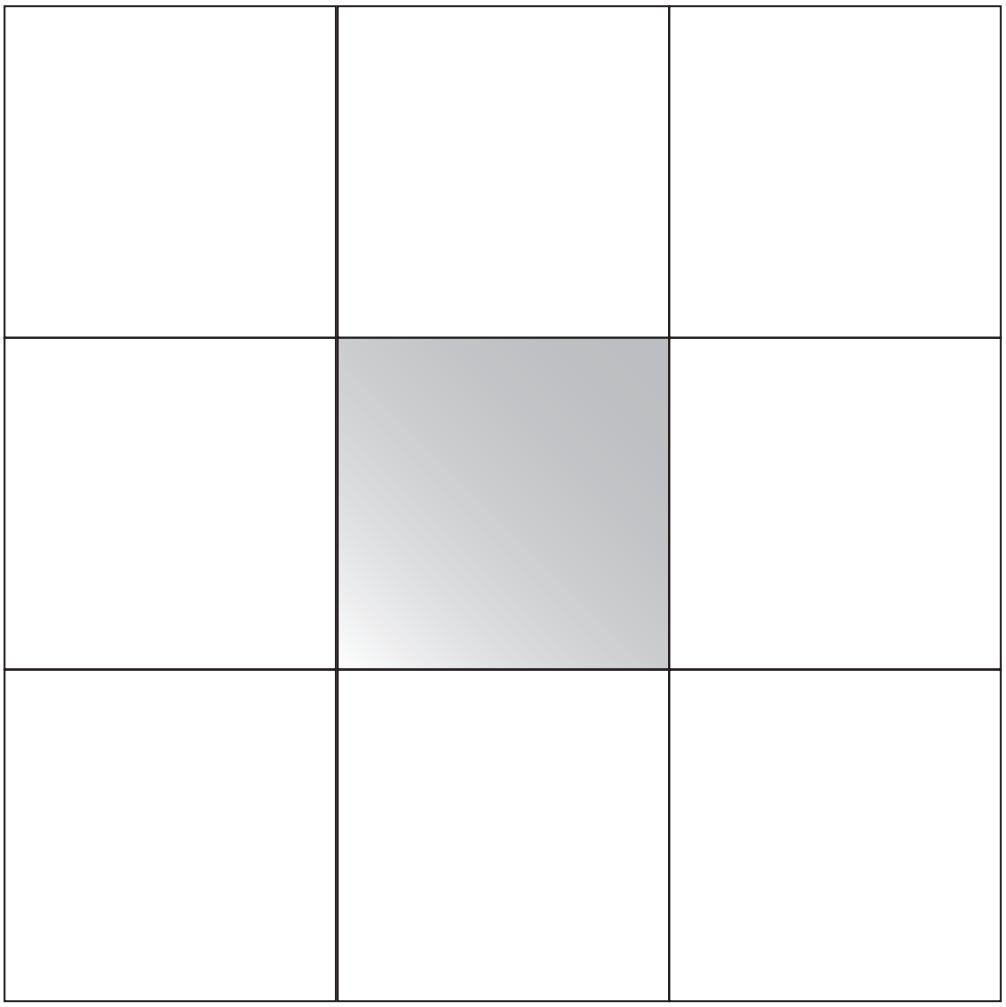
K 9 Knobel-Quadrate Name:

Vorlage zum Auslegen I

Lege acht Lösungskarten so in den Plan, dass...

a) ein offener,

b) ein geschlossener Streckenzug entsteht.



K 10 Knobel-Quadrate

Name:

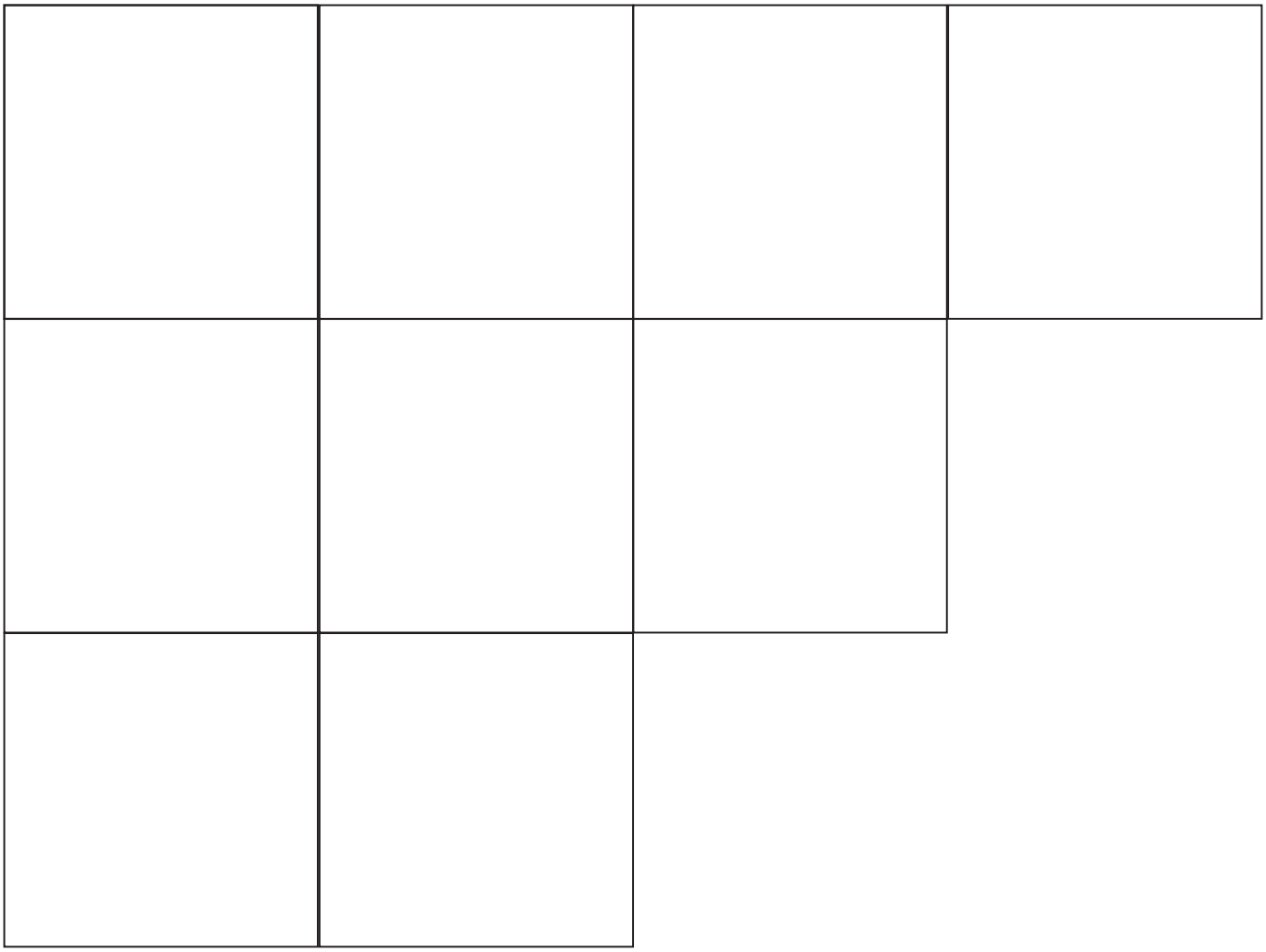
Vorlage zum Auslegen 2

Lege acht Lösungskarten so in den Plan, dass...

a) ein offener,

b) ein geschlossener Streckenzug entsteht.

Es sind (mindestens) vier verschiedene Lösungen möglich.



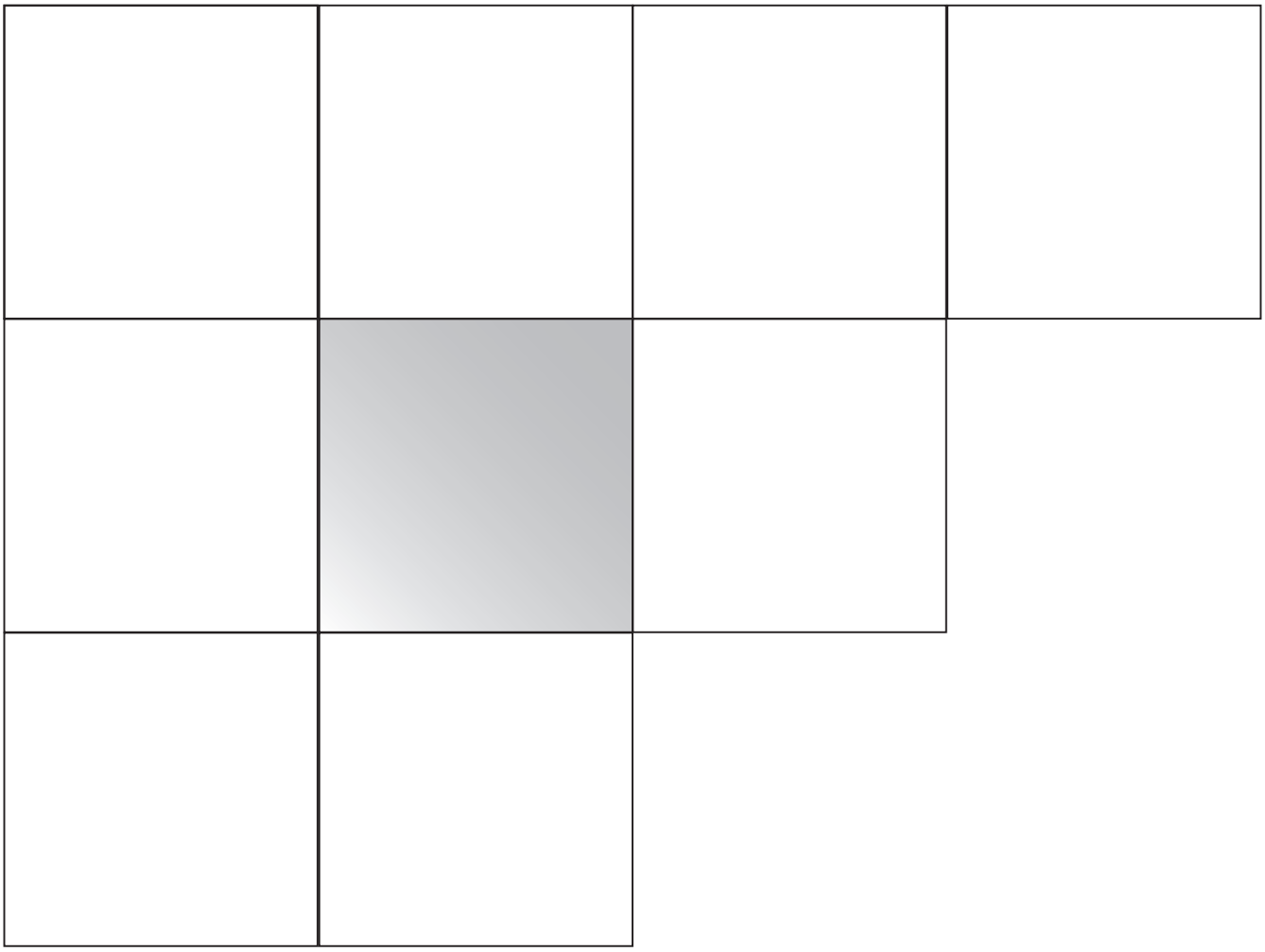
K 11 Knobel-Quadrate Name:

Vorlage zum Auslegen 3

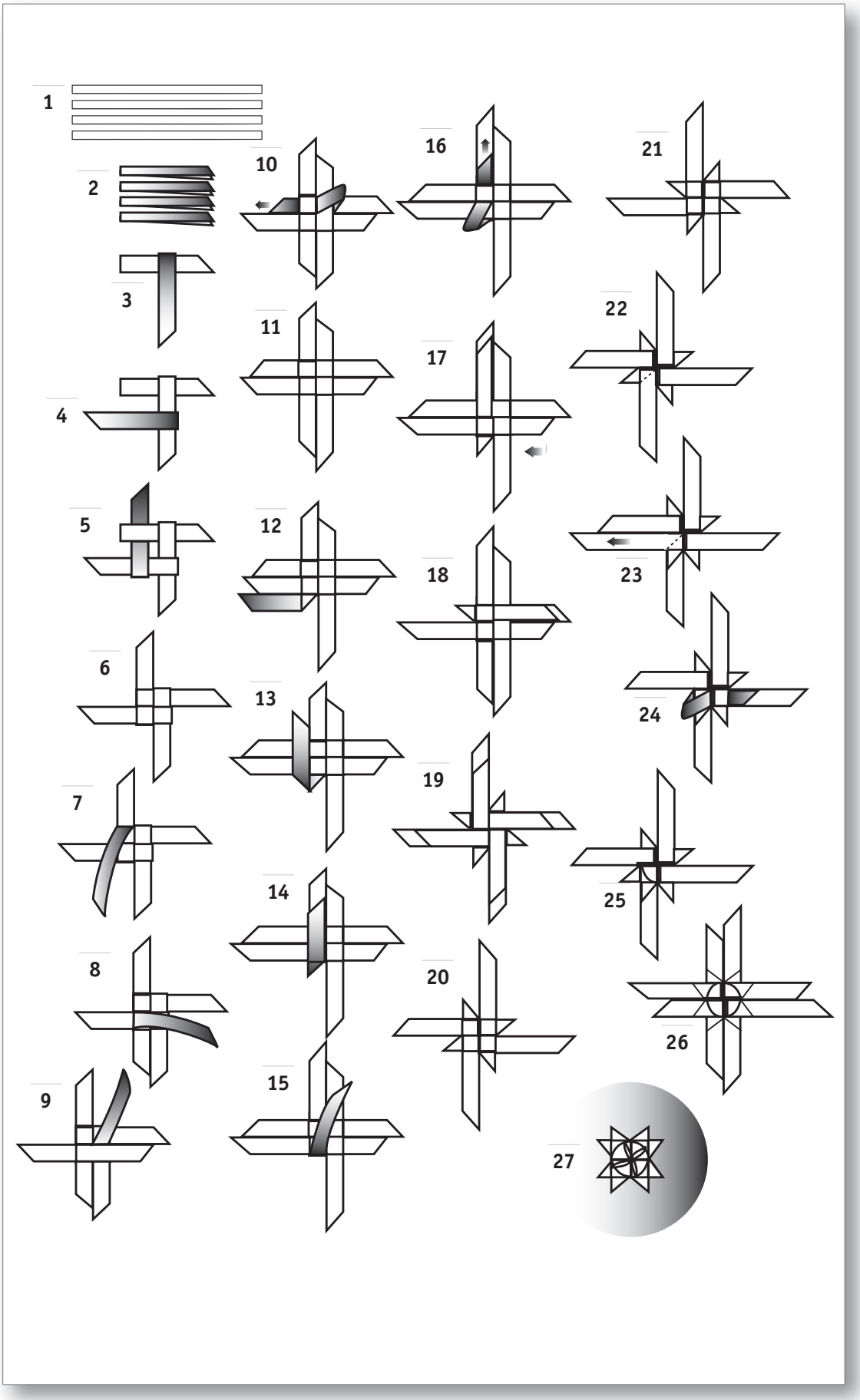
Lege acht Lösungskarten so in den Plan, dass...

a) ein offener,

b) ein geschlossener Streckenzug entsteht.



3.4 Der Fröbelstern



Worum geht es?

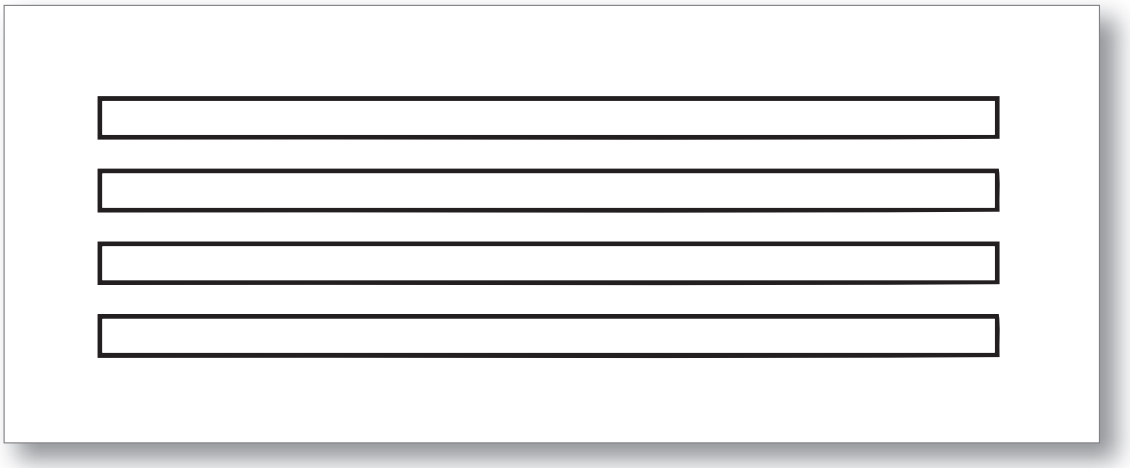
Beim Fröbelstern handelt es sich um eine anspruchsvolle Falt- bzw. Flechtaufgabe, bei der ein Stern aus vier Papierstreifen geflochten wird. Der Name geht auf Friedrich Fröbel (1782-1852), einen der Wegbereiter der Kindergartenbewegung, zurück. Fröbel nutzte die Freude von Kindern am Basteln und Spielen, um ihnen die Mathematik näher zu bringen.
Der Stern ist auch als Bethelstern, Weihnachtsstern oder schlicht als Faltstern bekannt.

Was soll geübt werden?

Die Kinder lernen eine umfangreiche Anleitung nachzuvollziehen, sie üben das genaue Falten, schulen ihre feinmotorischen Fähigkeiten und machen intensive Erfahrungen zu Raum-Lage-Beziehungen. Daneben wird der Umgang mit Fachbegriffen wie Ecke, Kante, Quadrat, senkrecht ... geübt.

Was wird benötigt?

Für die Sterne werden jeweils vier exakt gleiche Papierstreifen benötigt. Bewährt haben sich Streifen in den Maßen 1,5 x 44,5 cm. Diese sind in Bastelgeschäften erhältlich und nicht so teuer, als dass sich das Zuschneiden lohnen würde.
Zu Demonstrationszwecken ist es sinnvoll, Streifen in einem größeren Maßstab zur Hand zu haben. An ihnen können das Falten und Ineinanderschieben besser verdeutlicht werden.



Wie kann man vorgehen?

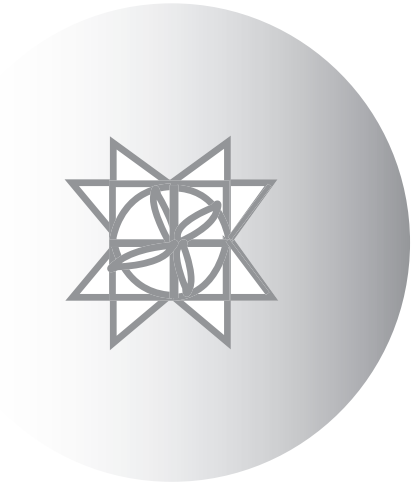
Die oben gezeigte Abbildung dient lediglich als Anregung, sie ist nicht als Anleitung für die Kinder gedacht.
Geschickten und falterfahrenen Kindern kann man ein Phasenmodell zur Verfügung stellen oder sie auffordern, den Stern mit Hilfe der Anleitung auf der Internet-Seite www.mathematische-basteleien.de/froebelstern herzustellen. Beide Wege sind aber sehr anspruchsvoll.
Als besserer Weg zur Einführung hat es sich bewährt, den Stern in Gruppen einzuführen z.B. im Rahmen einer Weihnachtswerkstatt. Man setzt sich immer mit bis zu zehn Kindern zusammen und faltet Schritt für Schritt einen großen Stern vor, während die Kinder einen kleineren nachfalten. Dabei ist darauf zu achten, die eigene Arbeit zu kommentieren bzw. den Kindern immer wieder Anweisungen zu geben, bevor man sie selbst durchführt. Dadurch werden wichtige Begriffe wie Quadrat, Ecke, senkrecht, horizontal oder im Uhrzeigersinn drehen verdeutlicht und erfahrbar gemacht.

TIPP: Die Sterne aus zwei unterschiedlichen Farben zu flechten, verbessert die Übersichtlichkeit und erleichtert die Beschreibung des Vorgehens.

Wie könnte es weitergehen?

Eine erste Variante des Fröbelsterns besteht darin, die vier langen Enden abzuschneiden bevor man die Tüten faltet. So erhält man einen flachen Stern. Alternativ werden nur auf einer Seite die Tüten gefaltet. So bleibt der Stern auf einer Seite flach und kann zum Beispiel zur Dekoration von Paketen genutzt werden.
Für Kinder, die das Falten des Sterns sicher beherrschen, ist es oft reizvoll besonders große oder besonders kleine Sterne zu basteln. Einige schaffen es, Fröbelsterne aus 5 mm breitem Geschenkband zu flechten. Es kann auch interessant sein, die Sterne aus verschiedenfarbigen Streifen oder aus anderen Materialien (Metallfolie, Seide,...) herzustellen.
Diese und weitere Anregungen findet man auf der oben genannten Internet-Seite.

Quelle: www.mathematische-basteleien.de/froebelstern oder Thiele, G. (2009): Geniale Fröbelsterne – Neue Varianten des beliebten Klassikers. Stuttgart: Frechverlag.



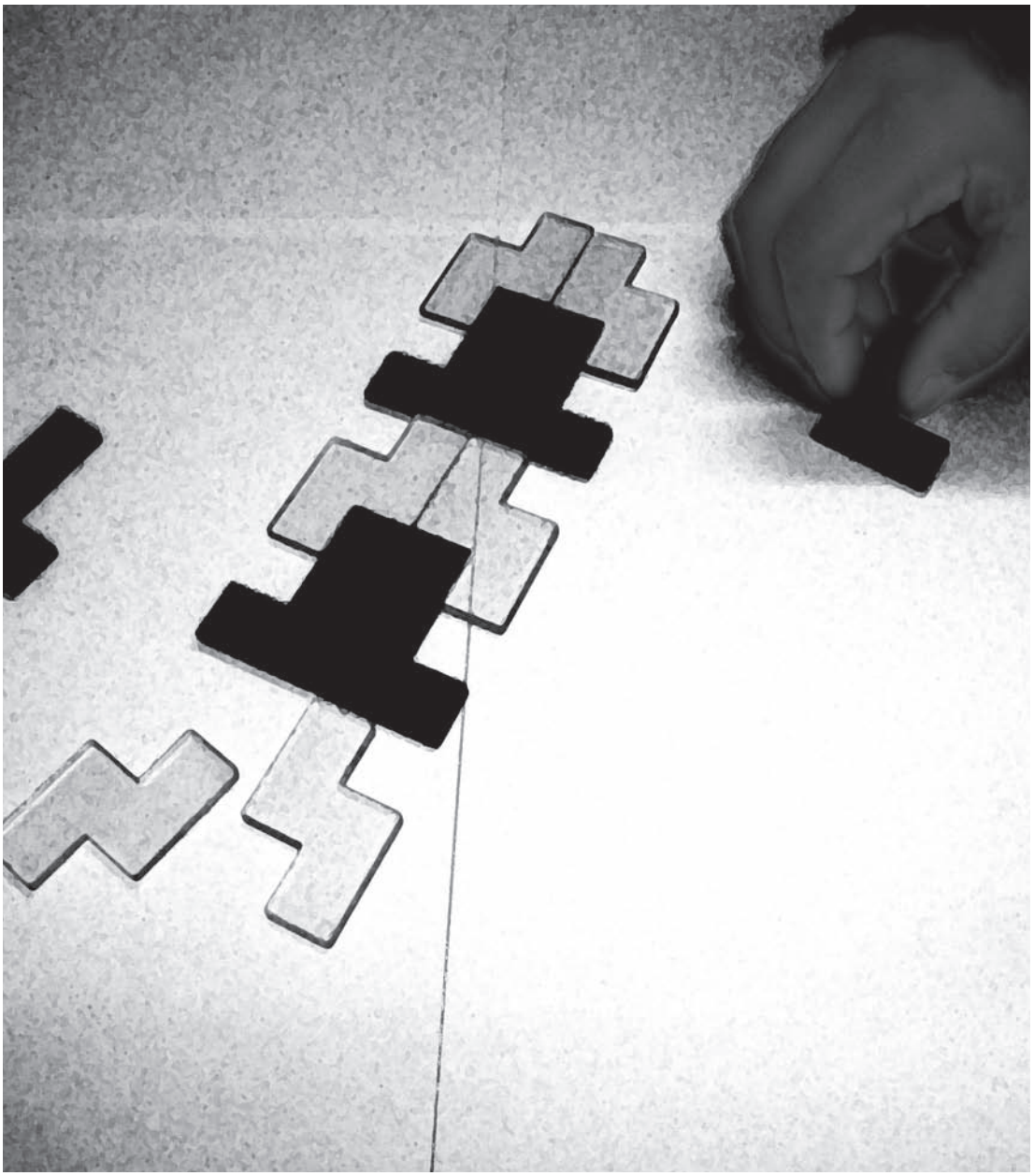
Eine Auswahl an Literatur und Arbeitsmitteln zur Leitdee Raum und Form für das Lernen im individualisierten Mathematikunterricht

Breiter, R. (2008): Entdeckerkartei 2, Flex und Flo. Diesterweg Verlag, Karte 13 A bis 16 D
Fuchs, M. / Käpnick, F. (2007): Knobel-Kalender. Mathe für kleine Asse. Volk und Wissen Verlag.
Grassmann, M. (2005): Knobeln mit Einstein 3 / 4 (1/2). Schroedel Verlag. S. 30-43
Hatt, W. (2007): Mathe-Stars 2. Knobel- und Sachaufgaben. Oldenbourg Verlag, S. 28, 54-55, 60
Hatt, W. (2007): Mathe-Stars 3. Knobel- und Sachaufgaben. Oldenbourg Verlag, S. 46-47, 57, 64
Käpnick, F. (Hrsg. 2006): Mathe für kleine Asse. Klasse 5 / 6, (1 / 2), (3 / 4) Cornelsen Verlag
Lack, C. (2008): Forderheft 3. Denken und Rechnen. Westermann Verlag. S. 39-41, 46-50,57
Lack, C. (2008): Forderheft 4. Denken und Rechnen. Westermann Verlag.
S. 22-23, 28-30, 45-47, 54-65
Lorenz, J. H. (Hrsg. 2006): Knobelbox 1 / 2. Westermann Verlag, Karte 33-59
Lorenz, J. H. (Hrsg. 2006): Knobelbox 3 / 4. Westermann Verlag , Karte 27-48
Mosel-Göbel, D. (Hrsg.): Forscherheft Mathematik 1./2. Schj. Diesterweg Verlag. S. 14-20, 35-40
Rinkens, H.-D. (Hrsg. 2000): Knobeln und Entdecken.
Aufgaben für leistungsstarke Kinder. 3./4. Schuljahr. Schroedel Verlag. S. 34-39
Walther, G. u.a. (2008): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret.
Cornelsen Verlag. S. 118-140

4 Leitidee Muster und Strukturen

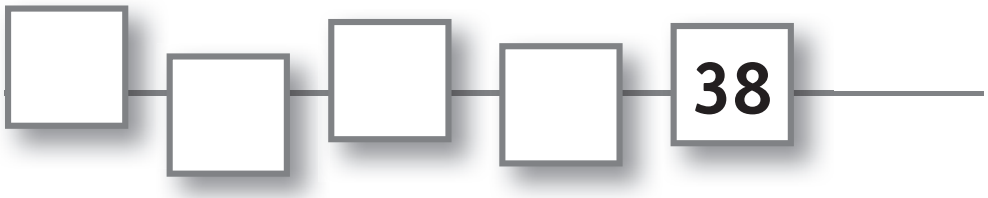
Der Bereich Muster und Strukturen gilt als ein grundlegender Aspekt der Mathematik. Er findet sich in allen anderen Ideen wieder und bezeichnet nicht weniger als das Wesen der Mathematik (Wittmann/Müller in Walther 2008).

Inhaltlich geht es um das Erkennen, Beschreiben und Darstellen von arithmetischen und geometrischen Mustern und Gesetzmäßigkeiten sowie um das Erkennen, Beschreiben und Darstellen funktionaler Beziehungen in Sachaufgaben und im Umgang mit Tabellen.



4.1 Zahlenketten

Zahlenketten bestehen aus fünf aufeinander folgenden Zahlen.
Die ersten beiden Zahlen darfst du frei wählen. Die dritte Zahl ergibt sich dann als Summe der ersten und der zweiten Zahl.
Die vierte Zahl ist die Summe der zweiten und der dritten Zahl, die fünfte Zahl die Summe der dritten und der vierten Zahl.
Die fünfte Zahl wird auch Zielzahl genannt.



Aufgabe

Finde mit verschiedenen Anfangszahlen Zahlenketten zur Zielzahl 38!

Worum geht es?

Das hier vorgestellte Problem geht zurück auf den italienischen Mathematiker Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci. Durch dessen Arbeit sind Zahlenfolgen, die nach der oben beschriebenen Regel gebildet werden, bekannt geworden und heißen seither auch Fibonacci-Folgen. An ihnen kann man viele mathematisch bedeutsame Entdeckungen machen.

Was soll geübt werden?

Bei der Arbeit mit Fibonacci-Folgen wird in jedem Fall die Addition intensiv geübt. Dabei muss der Zahlenraum nicht begrenzt werden. Neben dem Rechnen wird die Anwendung einer vorgegebenen Regel an unterschiedlichen Beispielen geübt. Darüber hinaus geht es um das Erkennen und Beschreiben von Mustern und Zahlzusammenhängen und die Anwendung erlernter Strategien auf neue Zusammenhänge.

Was wird benötigt?

Neben Papier und Stiften sind Wendeplättchen sowohl für die Hand der Kinder als auch für die Tafel hilfreich. Mit ihrer Hilfe können die Auswirkungen bei der Veränderung der Startzahlen einer Folge gut veranschaulicht werden.

Wie kann man vorgehen?

Da es sich um eine Aufgabe handelt, die auf einen berühmten Mathematiker zurückgeht, sollte auf jeden Fall mit einer kurzen Erzählung über Leonardo von Pisa begonnen werden. Erfahrungsgemäß interessieren sich Kinder sehr für solche historischen Zusammenhänge. Außerdem erhöht es die Motivation ungemein, wenn die Schüler wissen, dass sie sich mit etwas beschäftigen, mit dem sich schon berühmte Mathematiker auseinander gesetzt haben.
Im Anschluss an die Erzählung sollte die Regel zur Bildung der Fibonacci-Folge zunächst mit kleinen Startzahlen eingeübt werden.

Zur Festigung der Addition können nun neue Startzahlen vorgegeben werden, um weitere Folgen berechnen zu lassen oder die Kinder üben mit selbst gewählten Startzahlen. Dabei können auch längere Zahlenketten gebildet werden (AB I).

TIPP 1: Zu den Lösungen zur Zielzahl 38 kann man auf unterschiedlichen Wegen gelangen.

1. Die Kinder versuchen durch geschicktes Auswählen und Manipulieren der Startzahlen zu einer Lösung zu kommen.
2. Ein anderes Verfahren ist, die Folge von hinten zu entwickeln, d.h. die 38 in zwei Zahlen zu zerlegen und dann die Fibonacci-Regel „rückwärts“ anzuwenden (findige Kinder kommen selbst auf diesen Weg). Beispiel: 38 = 20 + 18, 20 = 18 + 2 und 18 = 2 + 16, die Folge lautet also: 16, 2, 18, 20, 38. Bei diesem Vorgehen werden die Schüler schnell merken, dass nicht alle Zerlegungen zum Ziel führen. Beispiel: 38 = 30 + 8, 30 = 8 + 22. Es gibt aber keine natürliche Zahl zu der ich 22 addieren kann, um das Ergebnis 8 zu erhalten.

Sind mehrere der sieben möglichen Folgen an der Tafel notiert, erkennen Schüler, die die Auseinandersetzung mit Zahlenmustern gewohnt sind, vielleicht bereits Zusammenhänge zwischen den Folgen (AB II).

Beispiel: Die Schüler haben die Folgen 10, 6, 16, 22, 38 und 13, 4, 17, 21, 38 gefunden. Nun können folgende Beobachtungen gemacht werden: Die erste Startzahl erhöht sich um drei während die zweite um zwei verringert wird. Der Unterschied bei den dritten und vierten Zahlen ist jeweils eins.

Diese Beobachtungen können beim Auffinden weiterer Lösungen genutzt werden.

Beispiel: Die erste Startzahl wird erneut um drei erhöht, die zweite um zwei verringert.
Wir erhalten die Folge: 16, 2, 18, 20, 38 und damit eine weitere Lösung.

Dieses Verfahren in beide Richtungen angewandt führt zu den Lösungen:

	1	12	13	25	38
	4	10	14	24	38
	7	8	15	23	38
10		6	16	22	38
13		4	17	21	38
16		2	18	20	38
19		0	19	19	38

An der ersten Folge wird deutlich, dass die erste Startzahl nicht weiter um drei verringert werden kann, ohne in den Bereich der negativen Zahlen zu kommen. Die letzte Folge begrenzt das Verfahren in die andere Richtung, weil hier die zweite Startzahl nicht kleiner werden kann.
Da an der dritten Stelle der Folgen die Zahlen 13 bis 19 und an der vierten Stelle die Zahlen 25 bis 19 lückenlos vorkommen, wird deutlich, dass es keine weitere Lösung gibt (AB III).

TIPP 2: Zur schnellen Überprüfung der Schülerlösungen, kann es sinnvoll sein, sich die algebraische Lösung zu vergegenwärtigen.

Dafür werden für die ersten beiden Kettenglieder die Variablen a, b $\in \mathbb{N}_0$ eingesetzt – (Die Beschränkung auf die Natürlichen Zahlen einschließlich der Null ist bis zur vierten Klasse sinnvoll, aber nicht zwingend. Sollten Kinder beispielsweise mit negativen Zahlen, Dezimalzahlen oder Bruchzahlen umgehen können, ist eine Beschränkung nicht nötig.) – dann heißt das dritte Kettenglied a + b, das vierte a + 2b und das fünfte Kettenglied 2a + 3b.
Bei unserer Aufgabe muss also geprüft werden, ob gilt:

$2a + 3b = 38$ bzw. $2a = 38 - 3b$ oder $3b = 38 - 2a$

In der Menge $\mathbb{N}_0$ besitzen die Gleichungen nur Lösungen für:

a = 1	=>	b = 12
a = 4	=>	b = 10
a = 7	=>	b = 8
a = 10	=>	b = 6
a = 13	=>	b = 4
a = 16	=>	b = 2
a = 19	=>	b = 0

Wie kann es weiter gehen?

Im Anschluss oder auch zur Vorbereitung des speziellen Problems zur Zielzahl 38 können ganz allgemein die Auswirkungen, die die Veränderung der Startzahlen bewirken, erarbeitet werden. Dazu ist es sinnvoll mit kleinen Startzahlen zu beginnen, um den Rechenaufwand gering zu halten.

Beispiel: 1, 2, 3, 5, 8. Nun wird nur die erste Startzahl um eins erhöht.

Wir erhalten: 2, 2, 4, 6, 10
Die dritte und vierte Zahl erhöht sich jeweils um eins, die Zielzahl um zwei.
Eine Wiederholung des Verfahrens zeigt, dass sich dieses Muster fortsetzt.

Ähnliches gilt für die Änderung der zweiten Startzahl. 1, 3, 4, 7, 11.

Warum ist nun die Zielzahl um drei größer als bei unserer Ausgangsfolge. Die Antwort ergibt sich aus der Betrachtung der dritten und vierten Zahl. Bei der Erhöhung der ersten Startzahl werden beide um 1 größer. Durch die Erhöhung der zweiten Startzahl wird die dritte Zahl um eins, die vierte Zahl aber um zwei erhöht, das ergibt eine Erhöhung der Zielzahl um drei.

Analog kann dann mit der Erhöhung um 2, 3,... bzw. der Verringerung der beiden Startzahlen experimentiert werden. Die Auswirkungen werden dokumentiert, beschrieben und verglichen.
Im nächsten Schritt wird erarbeitet, was geschieht, wenn die eine Startzahl erhöht und gleichzeitig die andere verringert wird. Dabei kann deutlich werden, dass das oben genutzte Verfahren der Erhöhung der ersten Startzahl um 3 bei gleichzeitiger Verringerung der zweiten Startzahl um 2, bei jeder anderen Folge die Zielzahl unverändert lässt.

Weitere Ideen zur Arbeit mit Fibonacci-Folgen:

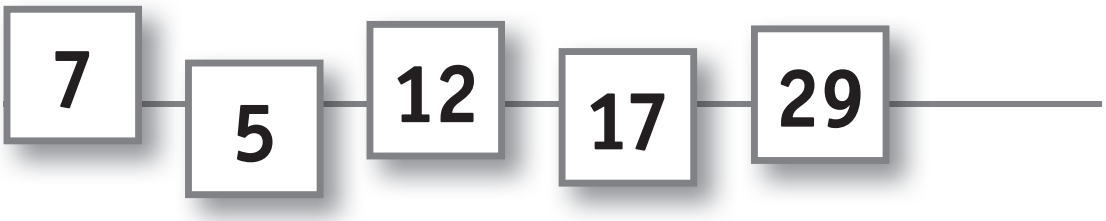
Die Betrachtung von Folgen mit vier bzw. sechs Zahlen.
Betrachtung von Folgen mit speziellen Startzahlen.
(Eine Startzahl ist die 0, beide Startzahlen sind gerade/ ungerade,...).
Gibt es eine Zielzahl, die sich bei beliebiger Wahl zweier (natürlicher) Startzahlen nicht erreichen lässt? (Nicht erreichbar ist nur die Zahl 1.)

Quelle: Wittmann, E./ Müller, G. N. (2005): Das Zahlenbuch 4, Schülerbuch, S. 105. Stuttgart: Klett Verlag.

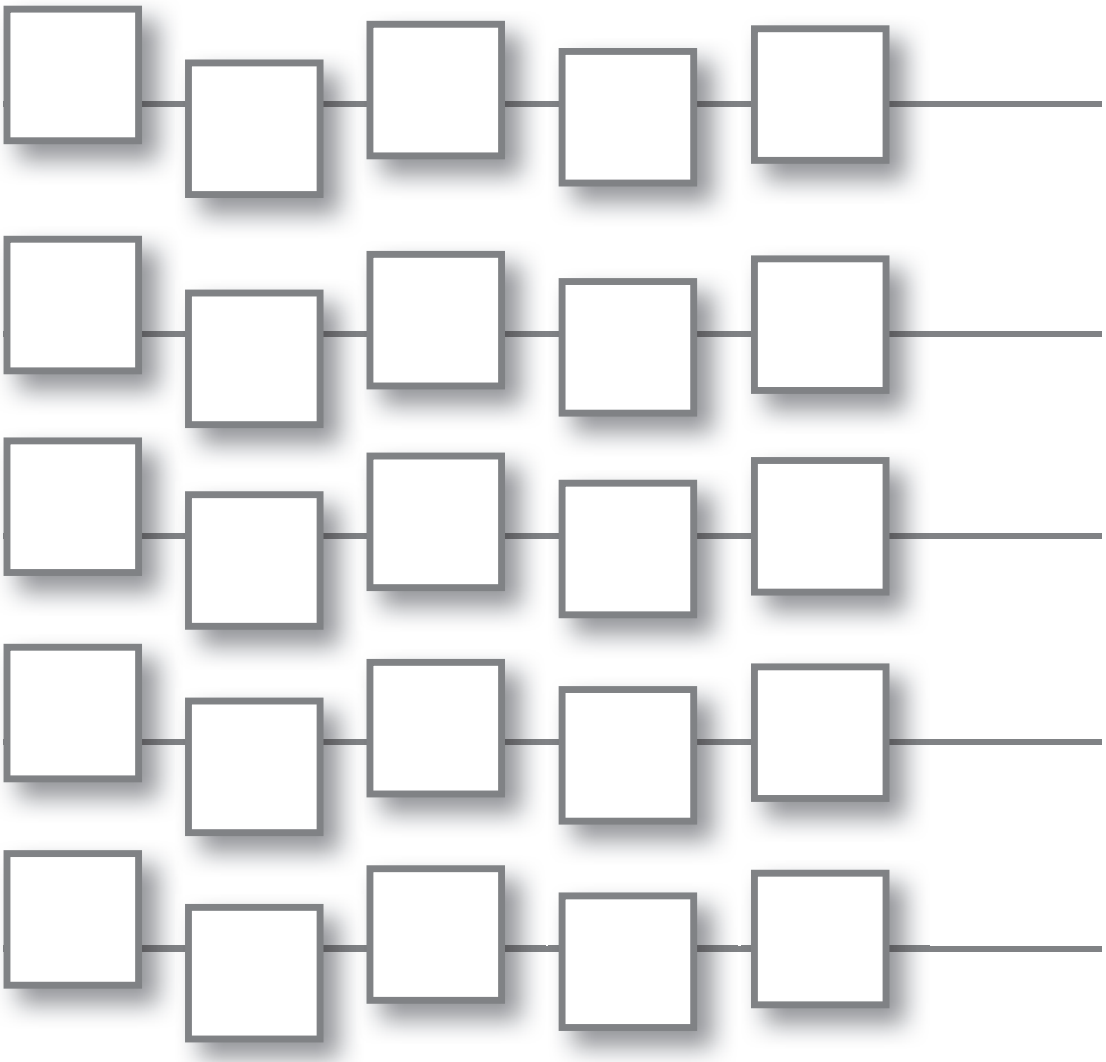
K 12 Zahlenketten I Name:

Zahlenketten bestehen aus fünf aufeinander folgenden Zahlen.
Die ersten beiden Zahlen darfst du frei wählen.
Die dritte Zahl ergibt sich dann als Summe der ersten und der zweiten Zahl. Die vierte Zahl ist die Summe der zweiten und der dritten Zahl, die fünfte Zahl die Summe der dritten und der vierten Zahl.
Die fünfte Zahl wird auch Zielzahl genannt.

Beispiel:



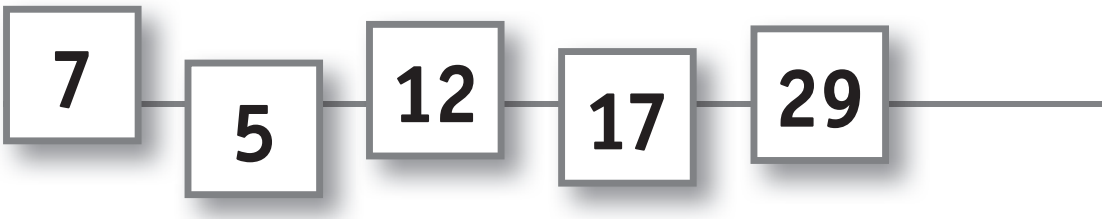
Aufgabe:
Wähle zwei beliebige Startzahlen und bilde Zahlenketten!



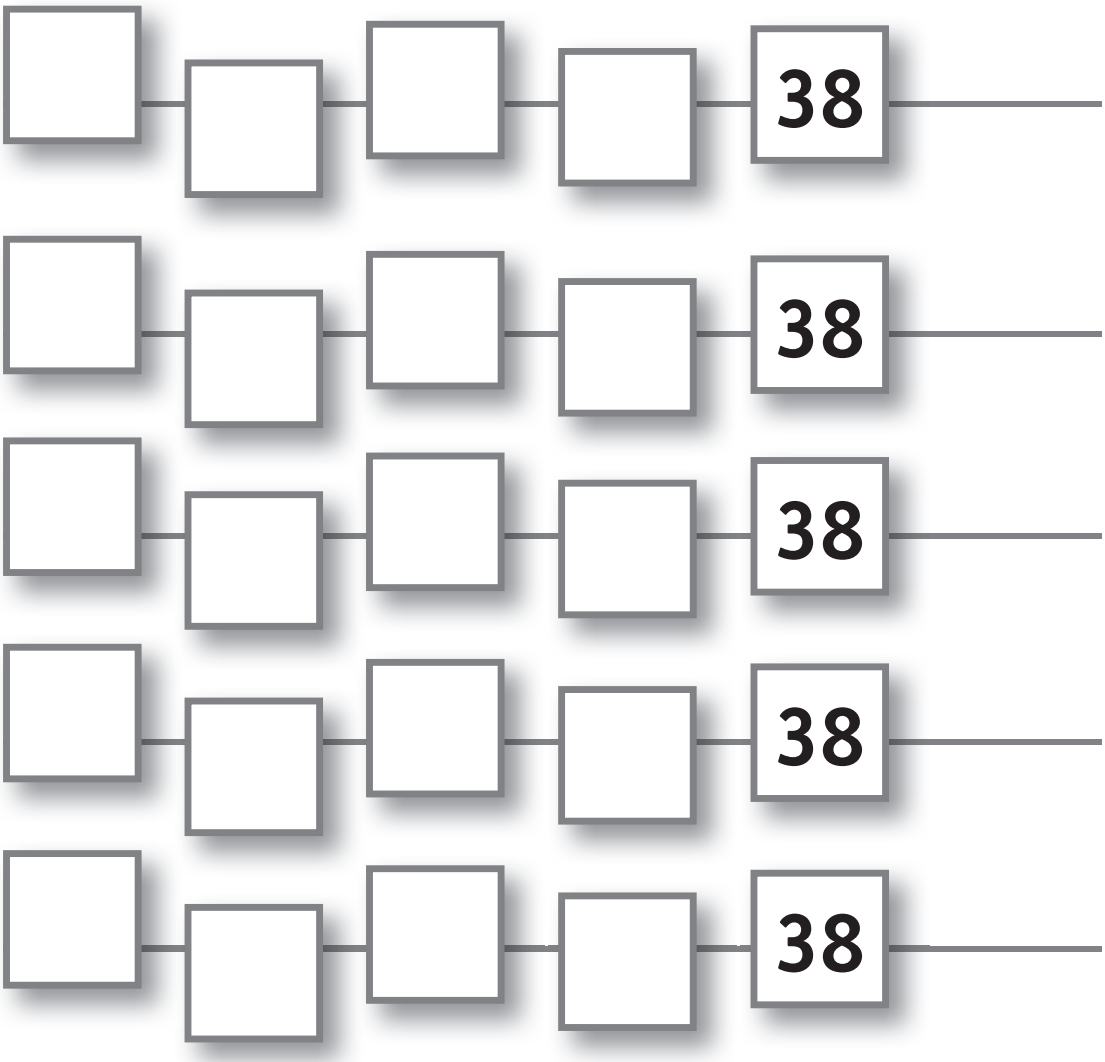
K 13 Zahlenketten II Name:

Zahlenketten bestehen aus fünf aufeinander folgenden Zahlen.
Die ersten beiden Zahlen darfst du frei wählen.
Die dritte Zahl ergibt sich dann als Summe der ersten und der zweiten Zahl. Die vierte Zahl ist die Summe der zweiten und der dritten Zahl, die fünfte Zahl die Summe der dritten und der vierten Zahl.
Die fünfte Zahl wird auch Zielzahl genannt.

Beispiel:



Aufgabe:
Bilde unterschiedliche Zahlenketten mit der Zielzahl 38!



4.2 Symbole in das Quadrat

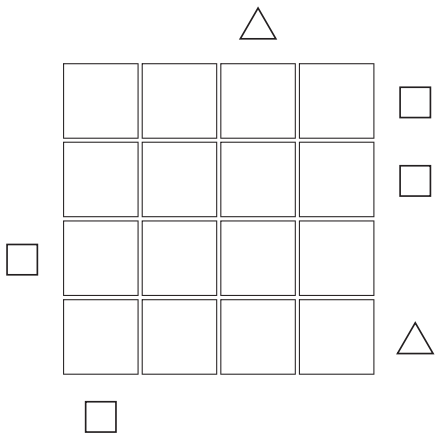
Finde 4 Kreise, 4 Dreiecke, 4 Quadrate und 4 freie Felder!

In jeder Spalte und Zeile kommt jedes Symbol genau einmal vor.
Dazu gibt es ein Feld mit „keinem Symbol“.
Rings um das Quadrat stehen an manchen Stellen Symbole.

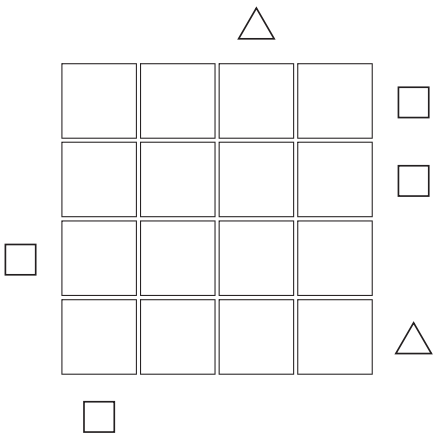
Ein bestimmtes Symbol am Rand heißt, dass dieses Symbol das erste Symbol ist, das von dieser Position in Richtung Quadrat steht.
Das bedeutet aber auch, dass ein Feld „ohne Symbol“
noch vor dem ersten Symbol stehen kann.

Steht z.B. ein Kreis am rechten Rand einer Zeile,
ist der Kreis das erste Symbol von rechts in dieser Zeile.

Er kann im ersten oder zweiten Feld von rechts stehen.



Für Notitzen:



Worum geht es?

Ähnlich wie bei anderen Anordnungsaufgaben müssen Symbole nach einer bestimmten Regel auf einem quadratischen Spielplan angeordnet werden. Während etwa bei Sudoku oder Logeo Ratio einzelne Zahlen oder Symbole bereits im Spielplan eingetragen sind, wird bei dieser Aufgabe die Position der ersten einzutragenden Symbole lediglich beschrieben. Die Lage aller weiteren Symbole ergibt sich durch logisches Folgern. Eine besondere Schwierigkeit besteht darin, dass auch Felder leer bleiben müssen.

Was soll geübt werden?

Neben dem Verstehen und Anwenden der Regeln wird das räumliche und logische Denken geschult. Beim Finden der richtigen Position für eine Figur müssen oft mehrer Bedingungen gleichzeitig beachtet werden. Da die Aufgabe sich sehr gut zur gemeinsamen Lösung in der Gruppe anbietet, wird auch das Kommunizieren und Argumentieren intensiv geübt.

Was wird benötigt?

Damit die Kinder ausreichend Gelegenheit zum Probieren haben, sollten sie ein Aufgabenblatt zur Verfügung haben, auf dem das zu füllende Quadrat möglichst oft abgebildet ist.

Um die Aufgabenstellung zu verdeutlichen und um später Lösungsversuche durchzuführen, ist es sinnvoll, ein Modell des quadratischen Spielplans vorzubereiten. Als Symbole eignen sich sehr gut die geometrischen Figuren aus den logischen Blöcken, die in vielen Schulen vorhanden sind.

Wie kann man vorgehen?

Zunächst wird im Sitzkreis die Aufgabenstellung gelesen und besprochen. Anschließend wird mit Hilfe des oben beschriebenen Spielplans und den geometrischen Formen die Aufgabenstellung erläutert. Mit dem Material kann sehr gut deutlich gemacht werden, was mit: *Ein bestimmtes Symbol am Rand heißt, dass dieses Symbol das erste Symbol ist, das von dieser Position in Richtung Quadrat steht*, gemeint ist. **Achtung:** Das bedeutet nicht, dass das jeweilige Symbol sich genau am Rand befindet. Es kann auch zunächst ein leeres Feld dort sein.
Wenn der Spielplan in der Mitte des Kreises steht, können die Kinder darum herum gehen und aus der jeweiligen Richtung auf das Quadrat blicken.
Wenn den Kindern die Aufgabenstellung klar ist, können sie allein oder in Gruppen an der Lösung arbeiten. Alternativ kann für die erste Aufgabe auch gemeinsam an einer Lösung gearbeitet werden. Das Modell kann dabei sehr gut zur Veranschaulichung von Lösungswegen genutzt werden.

TIPP 1: Die Arbeit wird vereinfacht, wenn auch die leeren Felder ein Symbol bekommen, zumal einige der Aufgaben nur lösbar sind, wenn man sich die Position der leeren Felder klar macht.

Wie kann es weitergehen?

Auf der nächsten Seite befinden sich 6 weitere Aufgaben, an denen sich die Kinder versuchen können.

TIPP 2: Wenn man die Aufgaben auf Karten kopiert, sie laminiert und durch den Spielplan und die geometrischen Formen ergänzt, erhält man eine reizvolle Knobelaufgabe für die Freiarbeit.

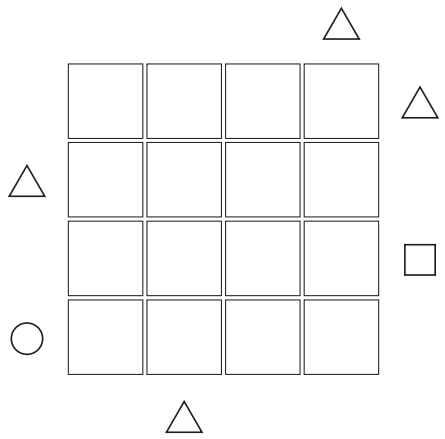
Quelle: Dietrich, R./Müller, R./Wenzel, W. (2004): Logik-Training im Unterricht.
59 mathematisch-logische Rätsel für Klasse 4 – 7, S. 22 ff. Lichtenau: AOL Verlag.
Hier finden sich auch weitere verwandte Aufgaben.

K 14 Symbole in das Quadrat

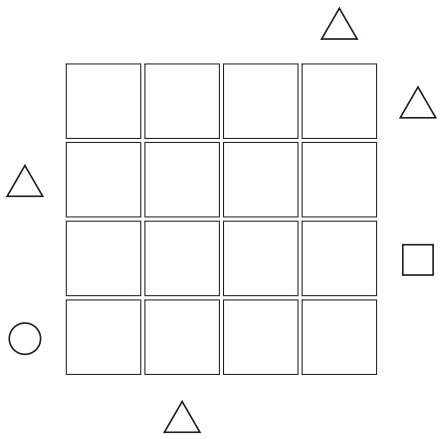
Name:

Finde 4 Kreise, 4 Dreiecke, 4 Quadrate und 4 freie Felder!

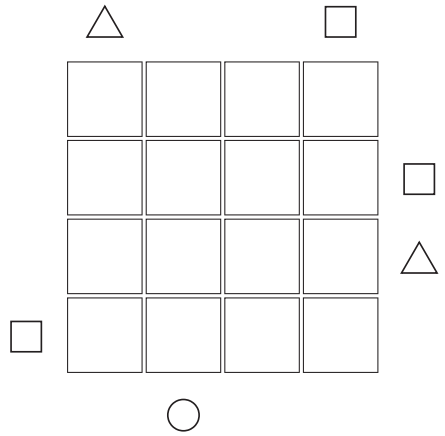
1.



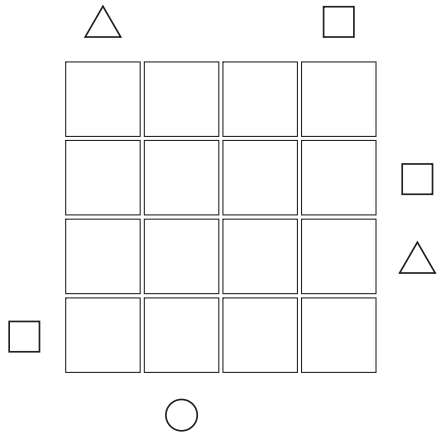
für Notizen



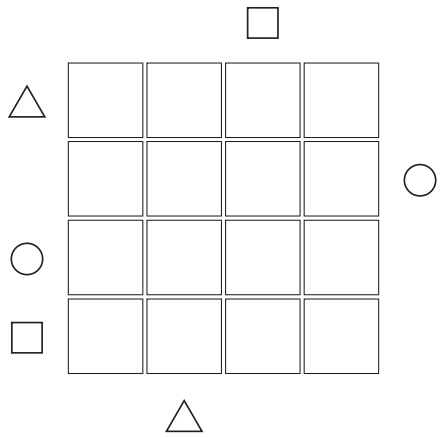
2.



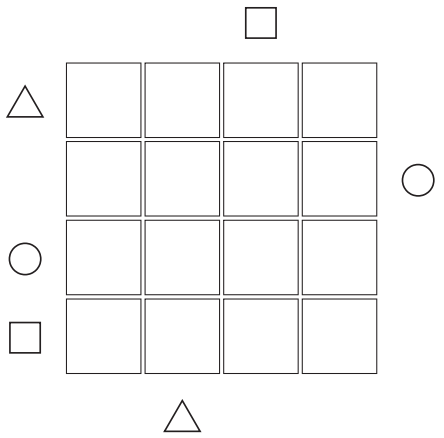
für Notizen



3.



für Notizen

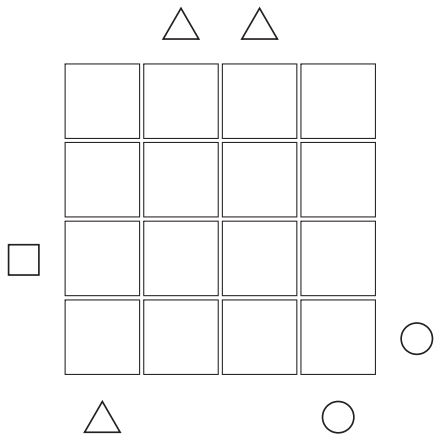


K 15 Symbole in das Quadrat

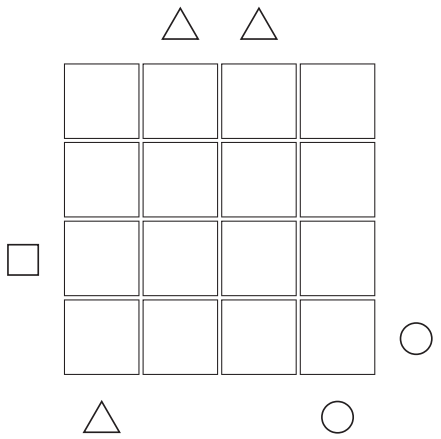
Name:

Finde 4 Kreise, 4 Dreiecke, 4 Quadrate und 4 freie Felder!

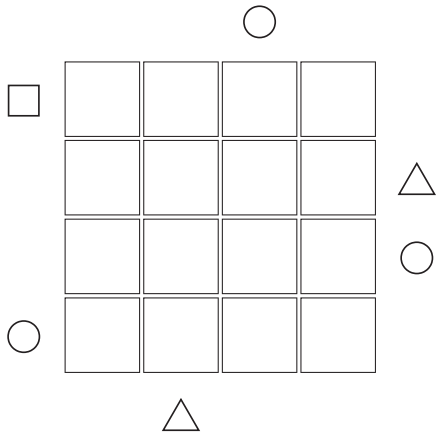
4.



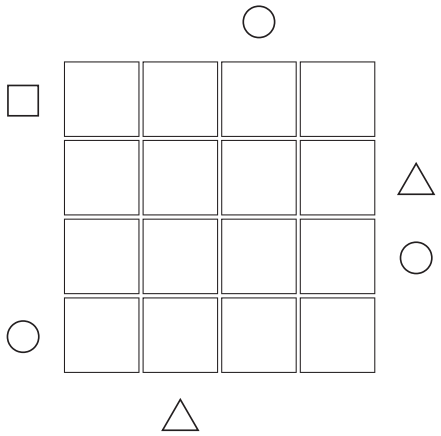
für Notizen



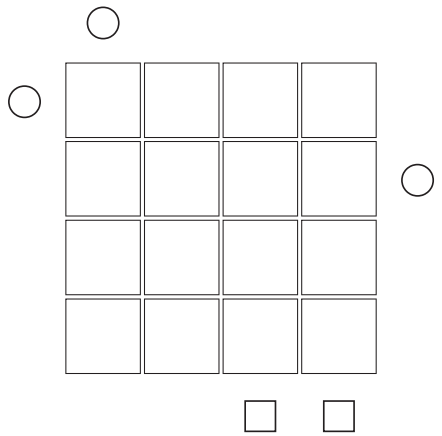
5.



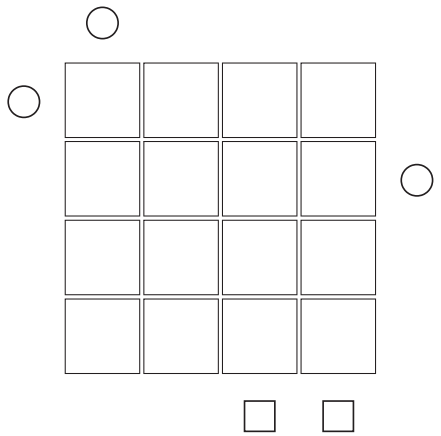
für Notizen



6.



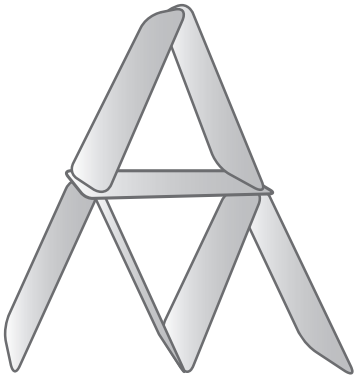
für Notizen



4.3 Ein Kartenhaus

Aus zwei Karten kann man den Anfang eines Kartenhauses bauen.

Um ein zweistöckiges Kartenhaus zu bauen, benötigt man sieben Karten.



1. Wie viele Karten benötigst du für ein vierstöckiges, fünfstöckiges, … Haus?
2. Wie viele Stockwerke hat das Kartenhaus, das man aus 104 Karten eines Kartenspiels bauen kann? Wie viele Karten bleiben übrig?
3. Stelle deine Behauptung in einer Skizze oder Tabelle dar.

Worum geht es?

Bei dieser Aufgabe geht es in erster Linie darum, zu erkennen, dass die Anzahl der benötigten Karten mit jedem Stockwerk um eine ganz bestimmte Anzahl wächst. Wenn diese Gesetzmäßigkeit erkannt wurde, kann die Anzahl der Karten, aus der jedes beliebige Kartenhaus besteht, rechnerisch ermittelt werden.
Da nicht alle Kinder einer Klasse diese rechnerische Lösung finden werden bzw. nachvollziehen können, ist es auch möglich die ersten speziellen Lösungen handelnd oder zeichnerisch zu ermitteln.

Was soll geübt werden?

Neben dem Erkennen und Beschreiben von Gesetzmäßigkeiten und dem Bilden und Beschreiben von Zahlenfolgen werden der Umgang mit verschiedenen Materialien und die Arbeit mit wechselnden Repräsentationsebenen geübt. Beim Vergleichen der Lösungen werden Kommunikations- und Argumentationsfähigkeit geschult.

Was wird benötigt?

Zur Veranschaulichung der Aufgabenstellung können Spielkarten und eine rutschfeste Unterlagen genutzt werden.

TIPP: Da das Bauen mit Spielkarten einiges Geschick und viel Geduld erfordert, ist es sinnvoll die Häuser mit Holzstäbchen oder Streichhölzern nachzulegen. Die Kinder werden erkennen, dass das Prinzip das gleiche ist und, dass das Bauen auch von größeren Gebäuden mit den Stäbchen deutlich einfacher ist.

Wie kann man vorgehen?

Der Einstieg zu diesem Problem kann über ein Gespräch zum Thema Kartenspiel und Spielkarten erfolgen. Dabei sollte insbesondere über die Anzahl von 104 Spielkarten gesprochen werden und für welche Spiele diese benötigt wird.

Zu Beginn der Auseinandersetzung mit der eigentlichen Aufgabe können die Kinder allein oder zu zweit versuchen Kartenhäuser zu bauen. Dabei wird ihnen zum einen das Bauprinzip verdeutlicht, zum anderen werden sie schnell erkennen, wie schwierig es ist, ein größeres Haus zu bauen. Bei der Gelegenheit sollte geklärt werden, was ein Stockwerk ist bzw. was zweistöckig, dreistöckig usw. bedeutet.

Anschließend werden die Holzstäbchen als alternatives Baumaterial eingeführt. Mit ihrer Hilfe kann ein Teil von Aufgabe 1 gelöst werden. Wenn jedes Kind bzw. jede Gruppe etwa 50 Stäbchen zur Verfügung hat, kann die Anzahl, die für ein vier- und ein fünfstöckiges Haus benötigt wird, durch Nachlegen ermittelt werden (AB I).

Wenn nicht genug Baumaterial für größere Häuser zur Verfügung steht, müssen die Kinder andere Wege zur Ermittlung der Anzahl der benötigten Stäbchen bzw. Karten finden. Eine Möglichkeit, die durch das Bauen mit Stäbchen nahe gelegt wird, ist eine zeichnerische Darstellung.
Das fünfstöckige Haus wird abgezeichnet und anschließend systematisch nach unten vergrößert. Wenn kein Fehler gemacht wird, erhalten die Schüler so die Lösung für die Aufgaben 2 und 3 (acht Stockwerke und vier Karten bleiben übrig) (AB II).

Der mathematisch interessantere Lösungsweg bedient sich zweier Zahlenfolgen. Die erste Folge ist die der Anzahlen der benötigten Karten für ein einstöckiges, zweistöckiges,... Haus.

Die Folge lautet: 2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, ...

Da an dieser Folge eine Gesetzmäßigkeit nur schwer zu erkennen ist, wird als nächstes die Folge der Differenzen zwischen den Häusern betrachtet. Die Differenz zwischen dem ersten und dem zweiten Haus ist 5, die zwischen dem zweiten und dritten beträgt 8 usw.

Es ergibt sich die Folge: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ...

Die meisten Kinder werden nicht ohne Hilfe bis zu der zweiten Folge kommen, sie werden aber vermutlich schnell erkennen, dass bei dieser Folge die Bildungsvorschrift +3 ist.
Daraus ergibt sich Folgendes: Für ein Haus mit einem Stockwerk benötige ich zwei Karten, für eins mit zwei Stockwerken 2+5=7 Karten, für drei Stockwerke 7+(5+3)=15, für vier Stockwerke 15+(8+3)=26, für fünf 26+(11+3)=40 Karten usw.
Die Folge der Differenzen zwischen den einzelnen Häusern sagt mir also, wie viele Karten mit dem Bau des nächsten Stockwerks dazu kommen (AB III).

In einer Tabelle kann das so dargestellt werden:

Stockwerke	Anzahl der Karten	Differenz
1	2	
2	7	5
3	15	5 + 3 = 8
4	26	8 + 3 = 11
5	40	11 + 3 = 14
6	57	14 + 3 = 17
7	77	17 + 3 = 20
8	100	20 + 3 = 23
9		23 + ...

Wie kann es weiter gehen?

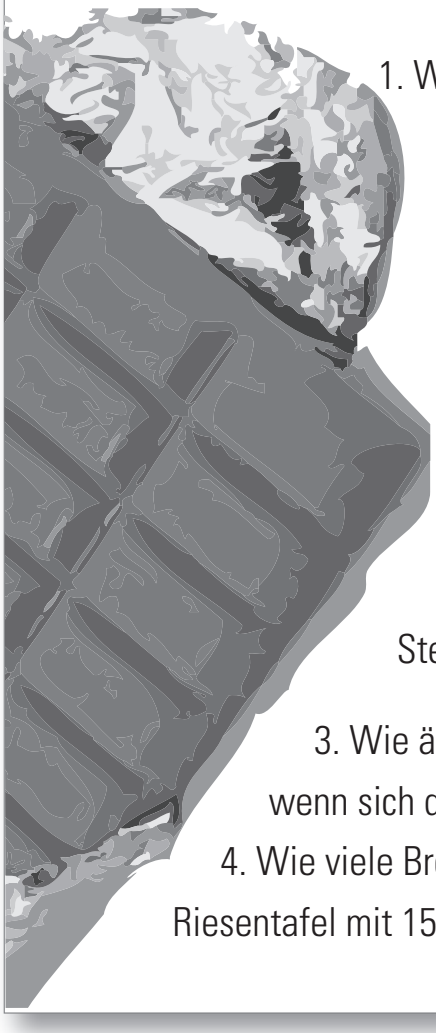
Haben die Kinder die Gesetzmäßigkeit verstanden können weiterführende Fragen gestellt werden wie: Für 8 Stockwerke benötigt man 100 Karten. Kann man mit 200 Karten dann 16 Stockwerke bauen? Begründe deine Antwort.

Oder: Für 5 Stockwerke benötigt man genau 40 Karten, für 8 genau 100. Wie viele Stockwerke muss man bauen, um wieder eine glatte Zehnerzahl Karten zu verbauen?

Quelle: Bardy, P. /Hrzán, J. (2005): Aulis Schatztruhe für die Grundschule – Aufgaben für kleine Mathematiker – mit ausführlichen Lösungen und didaktischen Hinweisen, S. 88. Köln: Aulis Verlag Deubner.

4.4 Schokoladen-Aufgabe

Pia hat eine Tafel Schokolade mit 4 mal 6 Stücken gekauft und möchte sie in Einzelstücke zerbrechen.



1. Wie viele Brechungen sind notwendig, wenn es nicht gestattet ist, mehrere bereits abgebrochene Streifen aufeinander zu legen? Was vermutest du? Überprüfe deine Vermutung!

2. Wie viele Brechungen sind bei einer quadratischen Tafel mit 4 mal 4 Stücken notwendig? Stelle wieder eine Vermutung auf!

3. Wie ändert sich die Anzahl der Brechungen, wenn sich die Anzahl der Stücke verändert?

4. Wie viele Brechungen sind bei einer Riesentafel mit 15 mal 20 Stücken notwendig?

Worum geht es?

Bei dieser Aufgabe geht es darum, zu erkennen, dass, wenn die oben beschriebene Regel eingehalten wird, die Anzahl der Brechungen unabhängig von der Reihenfolge der Brechungen konstant bleibt.

Was soll geübt werden?

Beim Finden der Lösung werden heuristische Strategien geübt. Zunächst wird eine Vermutung aufgestellt. Diese Vermutung wird durch Probieren mit konkretem Material überprüft. Das Problem wird in Teilprobleme zerlegt. Am Ende kann versucht werden, die Lösung für den oben beschriebenen Spezialfall mit anderen Spezialfällen zu vergleichen, um anschließend zu einer allgemeinen Lösung zu kommen. Durch das Ersetzen der Schokoladentafeln durch die Rasterflächen auf Papier wird der Wechsel der Repräsentationsebenen geübt.
Darüber hinaus geht es um das Erkennen von Mustern und Strukturen.

Was wird benötigt?

Zur Veranschaulichung der Aufgabenstellung werden mehrere Tafeln Schokolade verschiedener Größe benötigt. Als weitere Möglichkeit zur Veranschaulichung kann man die Kinder unterschiedliche Quadratmuster (3x3, 4x6,...) zeichnen und anschließend mit einer Schere zerschneiden lassen. Als Hilfe kann auch ein Arbeitsblatt mit unterschiedlichen Quadratmustern vorbereitet werden.

Wie kann man vorgehen?

Zunächst geht es natürlich um Schokolade. Wer isst gern Schokolade? Welche Sorten kennt ihr? Welche esst ihr am liebsten?....

Anschließend wird den Kindern die Aufgabe präsentiert. Nach der Klärung von Verständnisfragen wird dann vor den Augen der Kinder die erste Tafel Schokolade zerteilt. Dabei zählen die Schüler die einzelnen Brechungen mit. Bei dieser Gelegenheit kann die Aufgabenstellung bzw. die Brechungsregel nochmals deutlich gemacht werden.

Nachdem sich alle mit einem Stück Schokolade gestärkt haben, versuchen die Kinder andere Brechungs-Anzahlen zu erreichen. Um den Schokoladenverbrauch in Grenzen zu halten, lässt man die Schüler dann Quadratmuster zum Beispiel in der Form 4x6 zeichnen und zerschneiden. Diese Aufgabe kann gut in Partnerarbeit erledigt werden. Ein Schüler schneidet, während der andere die Anzahl der Schnitte zählt und auf die Einhaltung der oben beschriebenen Regel achtet (AB I).

Wahrscheinlich werden viele Schüler bald merken, dass die Anzahl der Brechungen (Schnitte) immer 23 ist, egal in welcher Reihenfolge gebrochen/geschnitten wird.
Diese Beobachtung kann nun an Tafeln mit einer anderen Anzahl von Stücken bzw. mit anderen Quadratmustern überprüft und bestätigt werden (AB II).

Mit Hilfe einer Tabelle können am Ende die Anzahl der Brechungen und die Anzahl der Stückchen einer Tafel in Bezug gesetzt werden. Warum hat jede Tafel immer ein Stückchen mehr als Brechungen notwendig sind, um alle zu zerteilen? Ist diese Frage beantwortet, ist die Lösung der Zusatzaufgabe zur Riesentafel schnell gefunden.

Wie könnte es weitergehen?

Während die Frage nach der Beziehung von Stückchenanzahl und Brechungsanzahl noch relativ einfach zu beantworten ist, erfordert die Frage nach den Beziehungen aller quadratischen Tafeln (2x2, 3x3, 4x4,...) untereinander oder die Untersuchung aller Zweiertafeln (1x2, 2x2, 3x2,...) oder Dreiertafeln bereits etwas mehr Nachdenken. Wer sich damit beschäftigt, kann u.a. die Zahlenfolgen der Brechungen betrachten und deren Bildungsgesetzt formulieren (AB III).
Eine weitere interessante Anschlussfrage ist die nach den Beziehungen zwischen Umfang und Flächeninhalt von rechteckigen Tafeln.
Mehr dazu in der unten aufgeführten Quelle.

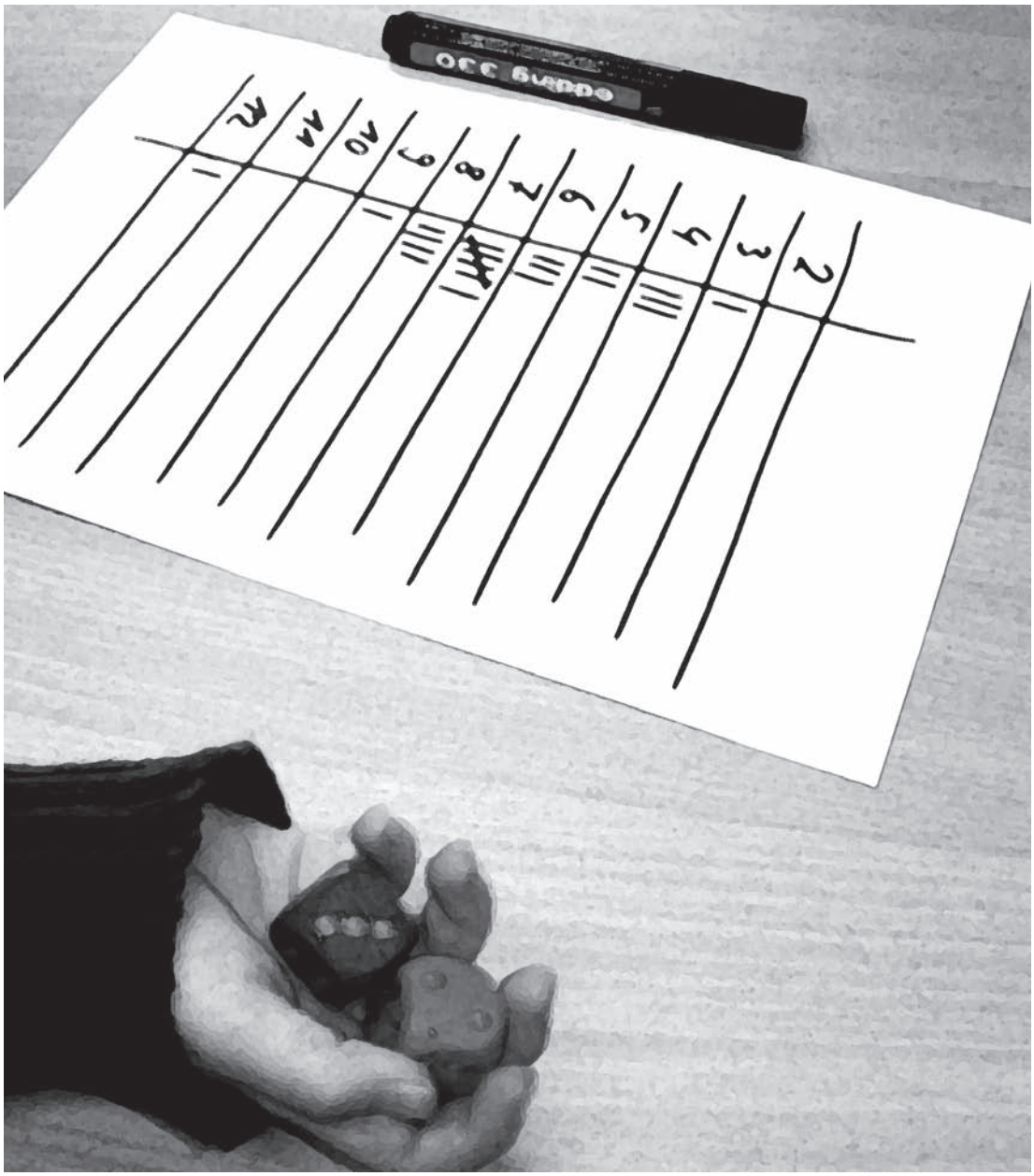
Quelle: Käpnick, F. (2001): Mathe für kleine Asse, Klasse 3/4, S. 83 ff.
Berlin: Volk und Wissen. Verlag.

Eine Auswahl an Literatur und Arbeitsmitteln zur Leitidee Muster und Strukturen für das Lernen im individualisierten Mathematikunterricht

Böhmer, J.P. (2005): Mathe-Ass. Materialien für leistungsstarke Kinder in der Grundschule. Auer Verlag, S.29-30,44-46,
Breiter, R. (2008): Entdeckerkartei 2, Flex und Flo. Diesterweg Verlag, Karte 12 A -12 E
Fuchs, M. / Käpnick, F. (2007): Knobel-Kalender. Mathe für kleine Asse. Volk und Wissen Verlag.
Ganser B. (2008): Mathematik Band 1. Besonders begabte Kinder individuell fördern. Auer Verlag
Grassmann, M. (2005): Knobeln mit Einstein 3 / 4 (1/2). Schroedel Verlag. S. 7-12
Hatt, W. (2007): Mathe-Stars 2. Knobel- und Sachaufgaben. Oldenbourg Verlag, S. 8, 22, 28, 29, 49, 64
Hatt, W. (2007): Mathe-Stars 3. Knobel- und Sachaufgaben. Oldenbourg Verlag, S. 47
Hengartner, E. (2006): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Klett Verlag. S. 27-215
Hoppius, C. (2008): Mathe-Detektive entdecken Muster und Strukturen. Zahlenketten, Zahlenmauern, Spiegelaufgaben. Auer Verlag
Krauthausen, G. (2006): Software Zahlenforscher - Zahlenmauern. Auer Verlag
Käpnick, F. (Hrsg. 2006): Mathe für kleine Asse. Klasse 5 / 6, (1 / 2), (3 / 4) Cornelsen Verlag
Lack, C. (2008): Forderheft 3. Denken und Rechnen. Westermann Verlag. S. 1, 10-13, 23,46-47
Lack, C. (2008): Forderheft 4. Denken und Rechnen. Westermann Verlag. S. 11, 15, 32
Lorenz, J. H. (Hrsg. 2006): Knobelbox 1 / 2. Westermann Verlag, Karte 60-78
Lorenz, J. H. (Hrsg. 2006): Knobelbox 3 / 4. Westermann Verlag, Karte 49-72
Mosel-Göbel, D. (Hrsg.): Forscherheft Mathematik 1./2. Schj. Diesterweg Verlag. S. 19-20
Rinkens, H.-D. (Hrsg. 2000): Knobeln und Entdecken. Aufgaben für leistungsstarke Kinder. 3./4. Schuljahr. Schroedel Verlag. S. 43-45
Shapiro,S. (2006): Knifflige Mathematikaufgaben strategisch lösen. Ab Kl. 3. Persen Verlag. S. 75-86
Walther, G. u.a. (2008): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Cornelsen Verlag. S. 42-63

5 Leitidee Daten und Zufall

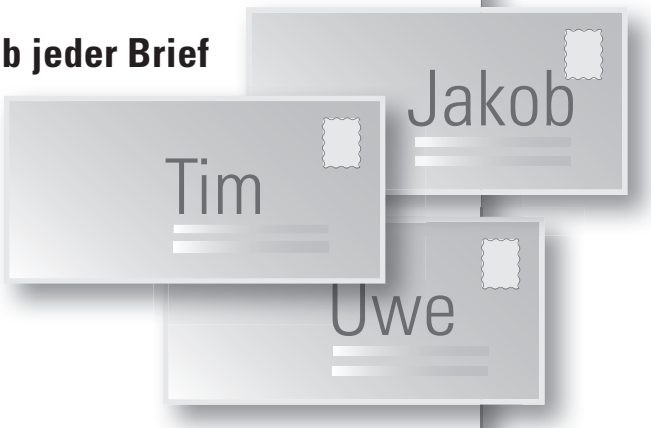
Der Kompetenzbereich Daten und Zufall umfasst das Erfassen von Daten bei Untersuchungen und einfachen Experimenten und deren Darstellung in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen. Umgekehrt sollen die Schüler lernen, solchen Darstellungen Informationen zu entnehmen.
Darüber hinaus geht es um die Auseinandersetzung mit Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimenten und das Einschätzen von Gewinnchancen (Beschlüsse der KMK 2005).
Die Schülerinnen und Schüler sollen von der ersten Klasse an die Chance haben, Kenntnisse über den Zufall zu erwerben und damit langfristig zu der Überzeugung kommen, dass der Zufall kalkulierbar ist und dass zufällige Ereignisse mit mathematischen Mitteln modelliert werden können (Hasemann / Mirwald / Hoffmann in Walther 2008).



5.1 Briefumschläge

Fabian hat seinen drei Freunden Jakob, Tim und Uwe je einen Brief geschrieben. In wenigen Minuten wird der Briefkasten geleert. Daher hat er es sehr eilig. Fabian hat gerade noch rechtzeitig die Briefe in den Kasten gesteckt.

Doch nun ist er sich nicht mehr sicher, **ob jeder Brief auch im richtigen Umschlag ist.**



Was denkst du?
Wofür ist die Chance größer?
Kreuze an!

- ❑ Fabian hat alle drei Briefe in die richtigen Umschläge getan.
- ❑ Fabian hat keinen Brief in den richtigen Umschlag getan.
- ❑ Fabian hat zwei Briefe in den richtigen Umschlag getan.

Wie könnte Fabian die Briefe in die Umschläge getan haben?

- Welche Möglichkeiten findest du?
- Gib eine Möglichkeit an.
- Gib möglichst viele Möglichkeiten an.
- Hast du alle Möglichkeiten gefunden?

Worum geht es?

Bei dieser Aufgabe ist der erste Teil der weitaus anspruchsvollere Teil. Hier sollen die Kinder Aussagen über die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Ereignisses machen. Im zweiten Teil sollen unterschiedliche Kombinationsmöglichkeiten gefunden und dargestellt werden, was mit den geeigneten Hilfsmitteln den meisten Kindern einer Klasse gelingt.

Was soll geübt werden?

Wie häufig bei Aufgaben aus diesem Bereich, wird auch hier das mathematische Modellieren geübt. Die Kinder übersetzen ein reales Problem in die Sprache der Mathematik. Die mathematische Lösung hilft anschließend bei der Bewältigung des realen Problems. Beim Aufschreiben der Lösungsmöglichkeiten wird der Umgang mit verschiedenen strukturierten Darstellungsformen (Tabelle, Baumdiagramm, Zeichnung,...) geübt. Daneben bietet die Aufgabe vielfältige Gelegenheit zur Kommunikation und Argumentation bei der Lösungsfindung als auch bei der Darstellung der Ergebnisse.

Was wird benötigt?

Zur Veranschaulichung des Problems ist es sinnvoll, Briefumschläge und Karten mit den Namen der Freunde darauf in größerer Zahl zur Verfügung zu haben. Mit ihrer Hilfe kann zunächst die Aufgabenstellung erläutert werden. Im weiteren Verlauf der Bearbeitung können einzelne Schüler immer wieder konkrete Verteilungen ausprobieren, um zur Lösung zu gelangen.

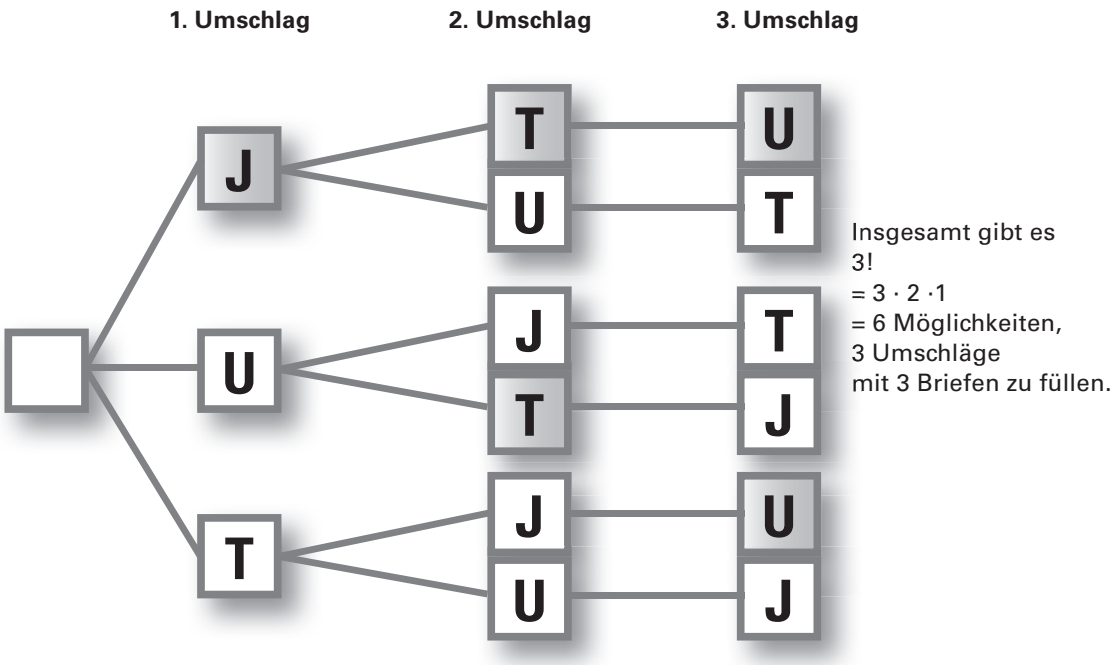
Wie kann man vorgehen?

Aussagen zur Wahrscheinlichkeit zu treffen fällt Grundschülern in der Regel sehr schwer. Vielen Kindern gelingt es nicht, sich bei ihrer Einschätzung allein auf die mathematischen Bedingungen zu beziehen. Um ihre Meinung, Fabian hat wahrscheinlich alle Briefe richtig einsortiert, zu stützen, nutzen Grundschüler gern Argumente wie: „Wenn er gut aufgepasst hat, dann hat Fabian die Briefe richtig zugeordnet“ oder „Vielleicht hat Fabian ja für jeden Freund andersfarbiges Briefpapier genommen.“
Daher ist es sinnvoller, sich zunächst auf den zweiten Teil zu konzentrieren.
Hierbei handelt es sich um eine kombinatorische Fragestellung, deren erste beiden Punkte von den meisten Kindern einer Klasse bearbeitet werden können. Viele Kinder werden auch verschiedene Lösungen finden. Um die letzte Frage sicher beantworten zu können, wird eine strukturierte Darstellung der Lösungen benötigt, die einerseits Dopplungen ausschließt und andererseits sicherstellt, dass keine weitere Lösung existiert.

Mögliche Darstellung in einer Tabelle.

Briefe	Umschläge		
	Jakob	**Tim**	**Uwe**
	Jakob	Tim	Uwe
	Jakob	Uwe	Tim
	Tim	Jakob	Uwe
	Tim	Uwe	Jakob
	Uwe	Tim	Jakob
	Uwe	Jakob	Tim

Mögliche Darstellung in einem Baumdiagramm.



TIPP: Eine solche Darstellung sollte erst am Ende der Arbeit stehen. Zunächst sollten die Kinder aufgefordert werden Lösungen zu finden und diese zu notieren. Anschließend einigt man sich auf eine gemeinsame Darstellungsform, um die Lösungen an der Tafel notieren und vergleichen zu können.

Wenn sichergestellt ist, dass alle sechs Möglichkeiten gefunden wurden und es keine weitere gibt, kann die Frage nach der Wahrscheinlichkeit erneut gestellt werden. Es reicht dabei völlig aus, wenn den Kindern deutlich wird, dass Fabian nur eine Möglichkeit hatte alle Briefe richtig einsortiert zu haben, aber fünf Möglichkeiten für einen Fehler hatte.

Wie kann es weitergehen?

Wie bei vielen Kombinatorikaufgaben ist auch hier die Weiterführung der Aufgabenstellung durch die Erhöhung der Briefzahl relativ einfach. Allerdings erhöht sich dadurch die Anzahl der möglichen Kombinationen beträchtlich. Bei 4 Briefen sind es bereits 24 unterschiedliche Lösungen. Anhand einer solchen Zusatzaufgabe kann insbesondere geprüft werden, ob den Schülern eine sinnvolle und übersichtliche Form der Darstellung ihrer Lösungen gelingt und sie diese auf die veränderte Aufgabenstellung anwenden können.
Alternativ können den Kindern andere Sachzusammenhänge angeboten werden, in denen es um die Kombination dreier Dinge geht.

Ein Beispiel, das ebenfalls als Problem des Monats genutzt wurde, findet sich bei: Nobach, I./Schmitt, E./Truxius, E (2007): Knobel-Aufgaben für die 3. und 4. Klasse, Seite 14. Berlin: Cornelsen.

Quelle: Kütting, H./ Sauer/ M.J. Padberg, F. (Hrsg.) (1999): Elementare Stochastik. S. 202. Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

5.2 Superhirn – Mastermind

A	B	C	D	X	O

Spielregel

1. Bereite einen Spielezettel vor:
2. Spielgruppe I wählt geheim (Notizzettel) eine Kombination aus vier Ziffern. Jede Ziffer kann mehrfach verwendet werden.
3. Spielgruppe II versucht, in möglichst wenigen Zügen (höchstens zwölf) die Ziffernkombination herauszufinden.
4. Spielgruppe I gibt folgende Hinweise in jeder Reihe:
   Ein X für jede richtige Ziffer am richtigen Ort.
   Ein O für jede richtige Ziffer am falschen Ort.
5. Punkte:
   - Spielgruppe I erhält so viele Punkte wie Spielgruppe II an Kombinationen gebraucht hat.
   - Errät Spielgruppe II die Kombination nicht in zwölf Versuchen, erhält Spielgruppe I 13 Punkte.
   - Macht Spielgruppe I beim Setzen von X und O einen Fehler, erhält Spielgruppe II 5 Punkte und hat einen neuen Versuch.

Worum geht es?

Superhirn oder Mastermind ist bereits seit mehreren Jahrzehnten als Spiel im Handel erhältlich. Bei dem Spiel geht es darum, eine Farb- hier Zahlenkombination, die ein Mitspieler vorgegeben hat, durch möglichst wenige Versuche zu ermitteln. Dabei ist entscheidend, dass aus den Rückmeldungen des Mitspielers zu den gemachten Versuchen, die richtigen Schlüsse gezogen werden.

Was soll geübt werden?

Mit dieser Aufgabe werden die kombinatorischen Fähigkeiten der Schüler gefördert. Dabei liegt der Schwerpunkt darauf, aus bereits gemachten Versuchen und den Rückmeldungen des Gegenspielers Schlüsse für das weitere Vorgehen zu ziehen. Beim Spielen in Gruppen oder mit der ganzen Klasse, werden die Argumentations- und die Kommunikationsfähigkeiten geschult.

Was wird benötigt?

Ein Spielplan, ähnlich dem oben abgebildeten, auf der Tafel, wenn mit der ganzen Klasse gespielt wird, oder auf Papier, wenn einzelne Schüler oder kleine Gruppen spielen. Sollen mehrere Runden gespielt werden, wird auch ein Ergebnisblatt benötigt.

Wie kann man vorgehen?

Da die Anzahl der möglichen Kombinationen bei der beschriebenen Ausgangslage sehr hoch ist, empfiehlt es sich, beim Spielen mit allen Kindern der Klasse zunächst einfacher zu beginnen. Man kann zum Beispiel mit drei Ziffern beginnen, von denen immer zwei ausgewählt werden. In diesem Fall gibt es genau **neun** mögliche Kombinationen und zwar 1,1; 1,2; 1,3; 2,1; 3,1; 2,2; 2,3; 3,2 und 3,3. Gleichzeitig werden nur maximal vier Versuche benötigt, um die gewählte Kombination zu ermitteln.

Beispiel: Die vorgegebene Kombination lautet: 1, 2

	A	B	Antwort
1	1	1	X
2	3	3	
3	2	1	0 0
4	1	2	X X

Dabei wird davon ausgegangen, dass die ersten beiden Versuche in jedem Fall gemacht werden, unabhängig von der Antwort auf Versuch 1. Wird die Antwort vor dem zweiten Versuch berücksichtigt, sähe das weitere Vorgehen so aus:

	A	B	Antwort
1	1	1	X
2	3	1	0
3	1	2	X X
4			

oder

	A	B	Antwort
1	1	1	X
2	1	3	X
3	1	2	X X
4			

oder

	A	B	Antwort
1	1	1	X
2	2	1	0 0
3	1	2	X X
4			

In jedem Fall wäre man dann bereits nach drei Zügen am Ziel.

Eine erste Steigerung der Schwierigkeit könnte dann darin bestehen, dass eine vierte Ziffer hinzukommt. Das würde die Anzahl der möglichen Kombinationen von 9 auf 16 erhöhen. Anschließend werden ein drittes Feld (64 Kombinationen) und zuletzt ein viertes Feld (256 Kombinationen) hinzugenommen. Wichtig ist von Beginn an immer wieder mit den Kindern zu besprechen, was die nach einem Versuch gegebene Antwort bedeutet. Dabei ist es unerlässlich, dass die Kinder wiederholt ihre Vermutungen und Schlüsse selbst artikulieren. Denn „die Sprache fällt zwischen unsere Handlung und unser Denken;..." (Kaplan, R., S. 36) Die Sprache hilft also die Handlungen in Denken zu übersetzen und ist damit ein wichtiger Schritt hin zur Abstraktion. Will man sofort mit vier Ziffern und vier Feldern beginnen, kann der Einstieg erleichtert werden, wenn die Einschränkung gemacht wird, dass jede Ziffer nur einmal benutzt werden darf.

TIPP: Auf der nächsten Seite ist ein Beispiel für einen Spielplan abgebildet. Besser ist es die Kinder ihre Arbeitsblätter selbst zeichnen zu lassen. Das erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass sie selbstständig spielen. Die Geheimzahl notiert man am besten auf einem kleinen Zettel, dadurch wird das Vergleichen erleichtert. Lassen Sie die Schüler partnerweise zusammenspielen, so erhöht sich der Austausch unter ihnen enorm!
Unterbrechen Sie die Spielphase und lassen Sie die Kinder zusammentragen, welche Strategien erfolgreich sind und welche Arbeitstechniken benutzt werden.

Wie kann es weitergehen?

Da diese Aufgabe selbst bereits sehr anspruchsvoll ist, sollte das Spiel nicht durch zusätzliche Ziffern ausgebaut werden. Sinnvoller ist die Konzentration darauf, durch wiederholtes Spielen die Anzahl der Versuche möglichst zu minimieren.

Quelle: Superhirn – Mastermind von Parker Spiele. Art. Nr. 44220100. Dreieich: Hasbro.Wittmann, E./Müller, G. N. (1998): Spielen und Überlegen – Die Denkschule, Teil 2, S. 3. Stuttgart: Klett Verlag.

K 16 Superhirn

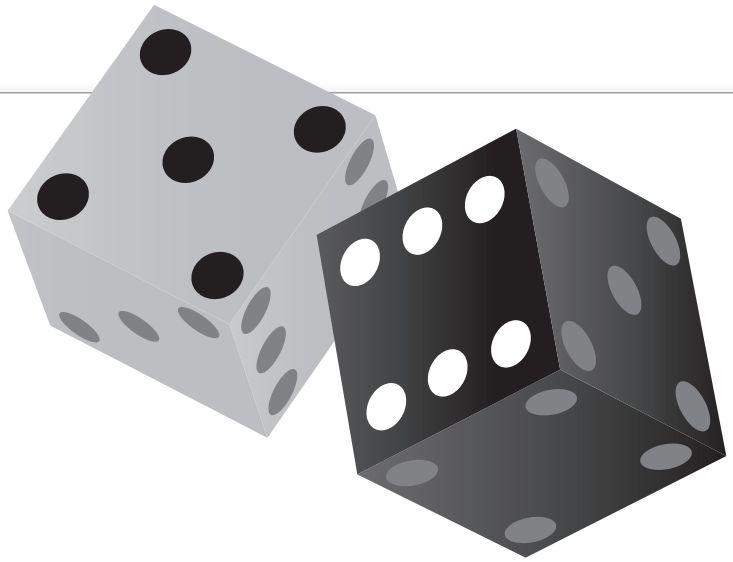
Name:

Superhirn – Mastermind – Spielplan

A	B	C	D	X O

Spielgruppe 1	Spielgruppe 2

5.3 Würfelprodukte



Idee: Zwei Spieler (A und B) würfeln mit zwei Spielwürfeln.
Sie multiplizieren die gewürfelten Augenzahlen.

Regel: Für ein gerades Produkt bekommt Spieler A einen Punkt – für ein ungerades Produkt Spieler B.

Frage: Ist diese Regel fair oder nicht?
Begründe deine Antwort mit einer Darstellung.

Worum geht es?

Bei dieser Aufgabe geht es darum, ein Spiel zu erproben und die Regeln des Spiels kritisch zu hinterfragen. Anschließend können alternative Spielregeln entwickelt, erprobt und bewertet werden. Dabei kann auch allgemein das Thema Glücksspiel mit den Kindern diskutiert werden.

Was soll geübt werden?

Die Kinder lernen die Regeln eines neuen Spiels und üben, diese richtig anzuwenden. Beim Spielen werden die Multiplikationsaufgaben bis 6x6 geübt. Darüber hinaus müssen die Kinder den Spielverlauf z.B. mit Hilfe einer Tabelle dokumentieren sowie eine Begründung dafür finden, warum die Spielregeln fair bzw. unfair sind.

Was wird benötigt?

Neben dem Aufgabenblatt und Papier zum Anlegen einer Tabelle sowie zum Aufschreiben von Aufgaben benötigen die Schüler pro Spielpaar zwei Würfel.

Wie kann man vorgehen?

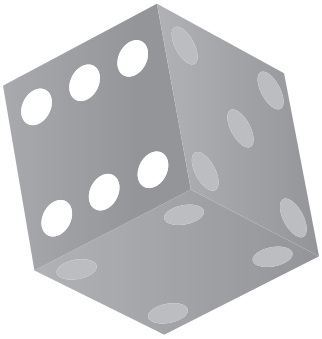
Zunächst werden die Regeln des Spiels vorgestellt und erläutert. Anschließend werden zur Verdeutlichung vor der Klasse in paar Proberunden gespielt und es werden Möglichkeiten zur Dokumentation des Spielverlaufs besprochen und ausprobiert.
Dann spielen die Schüler zu zweit einige Spielrunden. Dabei wird schnell klar, dass der Spieler, der bei einem geraden Produkt einen Punkt bekommt deutlich im Vorteil ist und nahezu immer gewinnt.

Nun müssen wahrscheinlich zunächst Argumente der Kinder wie: *Der kann besser würfeln, sie hat einfach mehr Glück*, entkräftet werden. Das geschieht am Besten, indem die Ergebnisse der einzelnen Gruppen an der Tafel gesammelt werden. Wenn deutlich wird, dass fast ausnahmslos der Spieler mit dem geraden Produkt gewinnt, egal welcher der Partner gerade in dieser Position ist, scheiden Glück und Können als Begründung aus.

Da die einzelnen Würfel je drei gerade und drei ungerade Augenzahlen besitzen, muss es etwas mit den Produkten zu tun haben. Also werden nun alle 36 möglichen Produkte ermittelt und notiert. Dies geht sehr übersichtlich in einer 6x6-Verknüpfungstabelle. Ein systematisches Aufschreiben in Form von Aufgabenpäckchen ist ebenso möglich.

Wünschenswert ist, dass die Schüler angeregt werden, sich eine eigne Systematik und eine individuelle Darstellung der Lösungen zu überlegen. Für Schüler, die dabei Schwierigkeiten haben, kann die Kopiervorlage (K17) bereitgestellt werden.

Anschließend werden die geraden bzw. die ungeraden Produkte gekennzeichnet. Nun wird deutlich, dass 9 ungeraden Ergebniszahlen 27 gerade entgegenstehen. Denn nur wenn zwei ungerade Zahlen miteinander multipliziert werden, ist auch das Ergebnis wieder ungerade.
Mit Hilfe des Quotienten der beiden Anzahlen 27:9 = 3 kann leistungsstarken Schülern eine erste Idee zu Angaben zur Wahrscheinlichkeit gemacht werden. Die Chance ein gerades Ergebnis zu erzielen ist dreimal höher als die Chance ein ungerades zu erreichen, die Chancen der Spieler stehen also 3:1.



Wie kann es weitergehen?

Eine nahe liegende Weiterführung ist die Frage danach, wie die Regeln verändert werden müssten, um das Spiel fairer zu gestalten. Anregungen dazu bietet die Kopiervorlage (K18).
Eine thematisch ähnliche Aufgabe zusammen mit einer guten Auseinandersetzung zum Thema Zufall findet sich in dem Artikel *Wer gewinnt? – Dem Zufall auf der Spur* von Ralph Schwarzkopf in der Grundschulzeitschrift 172/2004, S. 32-36. Dort geht es um Würfelsummen. Die in dem Artikel abgedruckte Verknüpfungstabelle enthält allerdings einen Fehler. Das erste Ergebnis oben links ist 2 und nicht 3.
Eine Anregung zur Auseinandersetzung mit Würfeldifferenzen bieten die Kopiervorlagen (K19-K20)

Quelle: Krug, I. (2006): Zwei Einser sind genauso gut wie zwei Sechser.
In: Grundschule Mathematik, 9/2006, Seite 22-24. Seelze: E. Friedrich-Verlag.

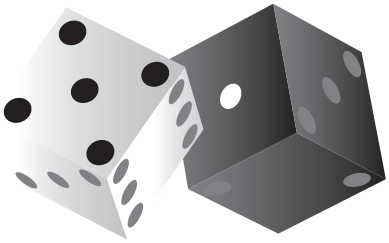
K 17 Würfelprodukte I

Name:

Spiel mit zwei Würfeln und multipliziere die beiden Augenzahlen.

Aufgabe: Trage alle möglichen Ergebnisse in die Tabelle ein.

•	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						



Betrachte die Tabelle und beschreibe, was dir auffällt.

Wie viele Ergebnisse sind gerade und wie viele sind ungerade?

Was bedeutet das für das Spiel?

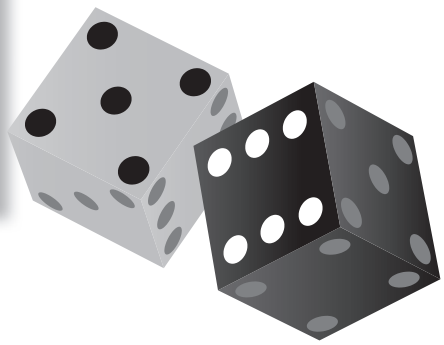
K 18 Würfelprodukte II

Name:

Spiel mit zwei Würfeln und multipliziere die beiden Augenzahlen.

Aufgabe: Trage alle möglichen Produkte in die Tabelle ein.

•	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						



Weitere Entdeckerfragen:

Wie viele Ergebnisse sind kleiner als 10 ? _____

Welche Zahlen sind das ? _____

Wie viele Ergebnisse sind größer oder gleich 10 ? _____

Welche Zahlen sind dies ? _____

Wie viele Ergebnisse kannst du durch drei teilen ? _____

Welche Zahlen kannst du durch drei teilen ? _____

_____

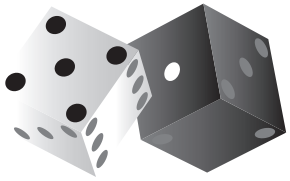
_____

K 19 Würfeldifferenzen

Name:

Spiel zugleich mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln.

Bilde die Differenz der Augenzahlen und trage diese in die Tabelle ein.



- Welche Differenz tritt am häufigsten auf?
- Versuche zu begründen!

Differenz

5	4	3	2	1	0
Möglichkeiten	Möglichkeiten	Möglichkeiten	Möglichkeiten	Möglichkeiten	Möglichkeiten
Am ehesten wird es in der Verwendung von Würfeln mit zwei Farben deutlich, da der Betrag entscheidend ist.					

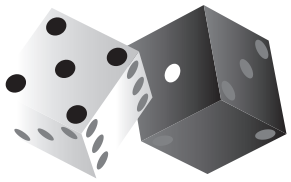
Ähnlich in: Mathematikus – 3. Seite 14 (Westermann).

K 20 Würfeldifferenzen Lösung

Name:

Spiel zugleich mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln.
Bilde die Differenz der Augenzahlen und trage diese in die Tabelle ein.

- Welche Differenz tritt am häufigsten auf?
- Versuche zu begründen!



Differenz

5	4	3	2	1	0
6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6
6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	5-5
	5-1	5-2	5-2	5-4	4-4
	5-1	5-2	5-2	5-4	3-3
		4-1	4-1	4-3	2-2
		4-1	4-1	4-3	1-1
			3-2	3-2	
			3-2	3-2	
				2-1	
				2-1	
2 Möglichkeiten	**4** Möglichkeiten	**6** Möglichkeiten	**8** Möglichkeiten	**10** Möglichkeiten	**6** Möglichkeiten

Am ehesten wird es in der Verwendung von Würfeln mit zwei Farben deutlich, da der Betrag entscheidend ist.

Ähnlich in: Mathematikus – 3. Seite 14 (Westermann)

5.4 Froschsprünge

Frochsprünge

Ein Frosch sitzt an einem Ufer eines Bachs. Er will zum anderen Ufer, aber das ist viel zu weit weg für einen Sprung. Glücklicherweise liegen im Wasser hintereinander sechs Steine, die er als Zwischenstation verwenden kann. Nun kann er immer von einem Stein zum anderen springen; er kann aber auch Sprünge auf den übernächsten und den überübernächsten Stein machen. Allerdings schafft er nicht mehr als zwei von diesen langen Sprüngen, bei denen er einen oder zwei Steine auslässt. Als einen „Weg" bezeichnen wir eine Folge von Sprüngen. Wie viele verschiedene Wege gibt es für den Frosch über den Bach?

Zusatzaufgabe: Wie viele Wege gibt es bei 10 Steinen?

Worum geht es?

Es geht bei dieser Aufgabe zunächst darum ein mathematisches Modell für eine vorgegebene (Real-)Situation zu entwickeln. Es muss eine sinnvolle Darstellung eines Weges entwickelt werden. Anschließend sollen alle möglichen Wege gefunden und so dargestellt werden, dass die Schüler sicher sein können, keinen Weg vergessen und auch keinen doppelt zu haben.

Was soll geübt werden?

Die Kinder üben das Mathematisieren einer in Worten dargestellten Situation sowie die systematische und übersichtliche Darstellung einer Reihe von Einzellösungen. Bei der Frage nach der Vollständigkeit ihrer Lösung üben sie Lösungen zu ordnen und zu vergleichen. Dabei haben sie Gelegenheit zum Kommunizieren und Argumentieren.

Was wird benötigt?

Die Abbildung auf dem Aufgabenblatt ist eine erste Hilfe zur Veranschaulichung des Problems. Deutlicher und für viele Kinder nachvollziehbarer wird die Situation durch einen Plastikfrosch, echte Steine und zwei aufgezeichnete Flussufer.
An dem Modell können die Kinder die Situation durchspielen und dabei Verständnisschwierigkeiten klären bzw. erste Lösungen entwickeln. Um die Situation für sich nochmals zu wiederholen, reichen dann das Aufgabenblatt mit der Zeichnung und einem Spielstein als Frosch aus.

Wie kann man vorgehen?

Die Ausgangssituation kann gut mit Hilfe des oben beschriebenen Materials im Stuhlkreis erläutert werden. Dabei ist es wichtig, dass Folgendes für alle deutlich wird:

1. Es sind zwar 6 Steine, da es aber um die Sprünge geht sind die Lücken entscheidend und davon gibt es 7.
2. Der Frosch macht Sprünge über eine, zwei oder drei Lücken, von den beiden letzten aber pro Weg nur insgesamt zwei.
3. Die Reihenfolge der großen und kleinen Sprünge kann variieren, wichtig ist nur, dass der Frosch am Ende die 7 Lücken übersprungen hat.

Wenn allen die Aufgabenstellung klar ist, geht es an das Finden der unterschiedlichen Wege und deren Darstellung. Sicher werden schnell die ersten Wege von den Kindern gefunden. Bei der Darstellung sollte es zunächst keine Vorgaben geben. Erst wenn man merkt, dass die Darstellungsformen der Kinder zu unklar oder zu wenig übersichtlich sind, sollte man lenkend eingreifen.
Eine relativ einfache Darstellung der verschiedenen Wege ergibt sich aus der Anzahl der mit einem Sprung überwundenen Lücken. Der Sprung von Stein zu Stein bekommt die Bezeichnung 1 (1 Lücke übersprungen), der Sprung bei dem ein Stein ausgelassen wird, heißt 2 (2 Lücken übersprungen) und der letzte mögliche Sprung heißt 3.
1, 1, 2, 3 wäre dann die Darstellung eines möglichen Weges. Die Zahlen addiert, hier 1+1+2+3, muss wieder 7 ergeben.
Nun muss eine systematische Darstellung entwickelt werden, in der alle Sprünge erfasst werden, ohne dass einer ausgelassen wird.

Etwa in Form einer Tabelle:

Verwendete Sprünge	Mögliche Wege	Anzahl der Wege
1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1		**1**
2 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1	**2 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1** **1 – 2 – 1 – 1 – 1 – 1** **1 – 1 – 2 – 1 – 1 – 1** usw. Der Zweiersprung kann also an 6 verschiedenen Positionen erfolgen.	**6**
2 – 2 – 1 – 1 – 1	**2 – 2 – 1 – 1 – 1 | 2 – 1 – 2 – 1 – 1** **2 – 1 – 1 – 2 – 1 | 2 – 1 – 1 – 1 – 2** **1 – 2 – 2 – 1 – 1 | 1 – 2 – 1 – 2 – 1** **1 – 2 – 1 – 1 – 2 | 1 – 1 – 2 – 2 – 1** **1 – 1 – 2 – 1 – 2 | 1 – 1 – 1 – 2 – 2**	**10**
2 – 3 – 1 – 1	**1 – 1 – 2 – 3 | 1 – 1 – 3 – 2 | 1 – 2 – 1 – 3** **1 – 2 – 3 – 1 | 1 – 3 – 1 – 2 | 1 – 3 – 2 – 1** **2 – 1 – 1 – 3 | 2 – 1 – 3 – 1 | 2 – 3 – 1 – 1** **3 – 1 – 1 – 2 | 3 – 1 – 2 – 1 | 3 – 2 – 1 – 1**	**12**
3 – 1 – 1 – 1 – 1	Der Dreiersprung kann an 5 verschiedenen Positionen erfolgen.	**5**
3 – 3 – 1	Der Einersprung kann an 3 verschiedenen Positionen erfolgen.	**3**

Egal ob man sich mit den Schülern auf die gerade gezeigte oder eine andere Darstellung einigt, wichtig ist die wiederholte Prüfung, ob noch Lösungen fehlen bzw. ob es bereits doppelte Lösungen gibt. Dabei sollten die Schüler immer wieder aufgefordert werden ihre Meinung zu begründen (Wir haben nun alle Lösungen, weil....). Wenn bei der Auflistung der Wege keine Fehler gemacht werden, müssen am Ende dem Frosch 37 Wege zur Verfügung stehen.

Wie kann es weitergehen?

Eine erste Differenzierung ist bereits auf dem Aufgabenblatt genannt. Dabei ist zu beachten, dass die Anzahl der unterschiedlichen Wege durch das Hinzunehmen von Steinen deutlich ansteigt. Umgekehrt kann auch die Anzahl der Steine verringert werden, wodurch die Anzahl der Lösungen sinkt und eine übersichtliche Darstellung vereinfacht werden kann. Neben der Anzahl der Steine kann auch die Sprungweite variiert werden, was wiederum Auswirkungen auf die Anzahl der möglichen Wege hat.

Quelle: Mathematikolympiaden e. V., Rostock und Amt für Bildung Hamburg (Hrsg.) (2006): Die 45. Mathematik-Olympiade 2005/2006. Aufgaben und Lösungen, S. 17-18. Hamburg.

Eine Auswahl an Literatur und Arbeitsmitteln zur Leitidee Daten und Zufall für das Lernen im individualisierten Mathematikunterricht

Behring (2011): Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit 2.-4. Klasse. Persen Verlag
Bettner/Dinges (2011): Stochastik an Stationen, Klasse 1+2 (3+4). Auer Verlag
Böhmer, J.P. (2005): Mathe-Ass. Materialien für leistungsstarke Kinder in der Grundschule. Auer Verlag, S. 17-18, 23-24
Finster,C. (2006): Logicals für Kinder. 3.-6.Klasse. Auer Verlag
Fuchs, M. / Käpnick, F. (2007): Knobel-Kalender. Mathe für kleine Asse. Volk und Wissen Verlag.
Grassmann, M. (2005): Knobeln mit Einstein 3 / 4 (1/2). Schroedel Verlag. S. 16-29
Hatt, W. (2007): Mathe-Stars 2. Knobel- und Sachaufgaben. Oldenbourg Verlag, S. 44
Hatt, W. (2007): Mathe-Stars 3. Knobel- und Sachaufgaben. Oldenbourg Verlag, S. 50
Hornschuh, H.-D. (2010): Pisa Training. Denkaufgaben zur Stochastik 3+4. Milderberger Verlag
Käpnick, F. (Hrsg. 2006): Mathe für kleine Asse.
Klasse 5 / 6, (1 / 2), (3 / 4) Cornelsen Verlag
Lack, C. (2008): Forderheft 4. Denken und Rechnen. Westermann Verlag. S. 53
Lorenz, J. H. (Hrsg. 2011): Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit Box 1-4. Westermann Verlag.
Lorenz, J. H. (Hrsg. 2006): Knobelbox 1 / 2. Westermann Verlag, Karte 86-93
Lorenz, J. H. (Hrsg. 2006): Knobelbox 3 / 4. Westermann Verlag, Karte 83-93
Mosel-Göbel, D. (Hrsg.): Forscherheft Mathematik 1./2. Schj. Diesterweg Verlag. S. 21-22, 41-43
Müller, G. / Wittmann, E. u. a.(2007): Das Kleine Zahlenbuch.
Probieren und Kombinieren, Ernst Klett Grundschulverlag.
Stucki, B. (2001): Logicals. Lesen-Verstehen-Kombinieren ab 2.Klasse. Schubi Verlag
Stucki, B. (2007):): Mathe Logicals. Für kleine Mathefüchse. Schubi Verlag
Shapiro,S. (2006): Knifflige Mathematikaufgaben strategisch lösen.
Ab Kl. 3, Persen Verlag S. 1-74
Walther, G. u.a. (2008): Bildungsstandards für die Grundschule:
Mathematik konkret. Cornelsen Verlag. S. 141-160
Grundschulunterricht 02 (2008): Mathematik – Daten –
Zufall und Wahrscheinlichkeit – Kombinatorik, Oldenbourg Verlag

6 Zusätzliche Literatur zum Thema – Eine Auswahl

Balmaekers, M. (2006): Denk fit – denk mit! mini - Knobeleien für kluge Köpfe – Denksportaufgaben und Zahlenrätsel für Einsteiger ab 2. Schuljahr. Schaffhausen: Schubi Lernmedien
Balmaekers, M. (2006): Denk fit – denk mit! maxi - Knobeleien für kluge Köpfe – Denksportaufgaben und Zahlenrätsel für Fortgeschrittene ab 2. Schuljahr. Schaffhausen: Schubi Lernmedien
Bardy, P. (2007): Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung. München: Spektrum Verlag
Bauersfeld, H. und K. Kießwetter, Eds. (2006). Wie fördert man mathematisch besonders begabte Kinder? Offenburg: Mildenberger Verlag
Beratungsstelle besondere Begabungen im Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung u. a. (2005): Besonders begabte und hochbegabte Kinder und Jugendliche – Hamburger Wegweiser- Chancen – Diagnostik – Beratung – Förderung – Underachiever - Eine Informationsbroschüre des Hamburger Gesprächskreises Besondere Begabung/ Hochbegabung
Beschlüsse der Kultusministerkonferenz (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München: Luchterhand Verlag
Besuden, H. (1984): Knoten, Würfel, Ornamente: Aufsätze zur Geometrie in der Grund und Hauptschule. Stuttgart: Klett Verlag
Betz, B. u. a. (2006): Oldenbourg – Kopierbibliothek – Knobelaufgaben. München: Oldenbourg Schulbuchverlag
Bundesministerium für Bildung und Forschung (2001): Begabte Kinder finden und fördern – Ein Ratgeber für Eltern und Lehrer. Bonn
Butzert, K. / Schweden, K.-W. (2004): Mathe-mobil 1 / 2 – Sachaufgaben – Rechnen – Knobeln – Kombinieren. Oberursel: Finken Verlag
Christiani, R. (Hrsg.) (1994): Auch die Leistungsstarken Kinder fördern – Grundlegung und Ideensammlung – Kreatives Lesen, Schreiben, Rechnen – Erkunden, Entdecken, Forschen. Berlin: Cornelsen / Scriptor Verlag
Dahl, K. / Lepp, M. (2000):Wollen wir Mathe spielen? Witzige Spiele und kniffelige Aufgaben. Hamburg: Oetinger Verlag
Dahl, K. / Nordquist, S. (1996): Zahlen, Spiralen und magische Quadrate – Mathe für jeden. Hamburg: Oetinger Verlag
Die Grundschulzeitschrift 160 (2002): Leistungsstarke Kinder. Seelze: Friedrich Verlag
Enzenzberger, H. M. (1997): Der Zahlenteufel – Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben. München, Wien: Carl Hanser Verlag
Flachsel, E. (1982): hundertfünfzig Mathe-Rätsel. Stuttgart: Klett Verlag
Fritzlar, T. u. a. (2006): Mathe für kleine Asse – Empfehlungen zur Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler im 5. und 6. Schuljahr – mit Kopiervorlagen. Berlin: Cornelsen / Scriptor Verlag
Fuchs, M. / Käpnick, F. (2001): „Immer 1, 2, 3, 4 und 5, das ist langweilig“ – Kinder bestimmen selbst Zahlenanordnungen – In: Grundschulunterricht 48 / 2. – S. 54 – 58. München: Oldenbourg Schulbuchverlag
Fuchs, M. / Käpnick,F. (2001): Ein Rechentrick – In: Grundschulunterricht 48 / 10. S. 29 – 32. München: Oldenbourg Schulbuchverlag
Fuchs, M. / Käpnick, F. (2002): Take five! – Parkettieren eines Hunderterfeldes mit Quadratfünflingen - In: Lernchancen 28, S. 12-15. Seelze: Friedrich Verlag
Gale, H. / Skitt, C. (1994): Kniffelige Zahlenrätsel für schlaue Kids - ab 10 Jahren. Niederhausen/Ts: Bassermann Verlag
Haver, D. u. a. (2001): Basistraining: Strategien zur Problemlösung – Systeme entdecken und knacken – Klasse 5 / 6. Mülheim an der Ruhr: Verlag an der Ruhr
Heinze, A. (2005): Lösungsverhalten mathematisch begabter Grundschulkinder – aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen. Münster: LIT Verlag
Heitmann, F. (1994): Mathe mit Witz und Grips – 400 verblüffende Aufgaben: ernst und heiter. Eine Selbstlernkartei. Festigt das mathematische Grundwissen der Klassen 7 bis 10. Bereitet auf die Mittlere Reife vor. Lichtenau: Freiarbeit Verlag
Hornschuh, H.-D. (2006): Ein mal Eins ist immer Eins – Mathematische Denkaufgaben für das 1. Grundschuljahr. Offenburg: Mildenberger Verlag

Hussy, W. (1993): Denken und Problemlösen. Stuttgart: Kohlhammer Verlag
Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder (Hrsg. Von A. Pehnke). –
Frankfurt a. M., Berlin, Bern, New York, Paris, Wien: Peter Lang Verlag
Käpnick, F. (1999): Notwendigkeiten und Möglichkeiten einer verstärkten
Integration mathematisch begabter Kinder in den „normalen" Unterricht. –
In: Mathematische Unterrichtspraxis IV. Quartal, S. 3-11. Seelze: Kallmeyer Verlag
Käpnick, F. (2002): Die Förderung hoch begabter Kinder – eine Herausforderung
an unsere Grundschule – In: Grundschulunterricht 49 / 7-8. – S. 2-7.
München: Oldenbourg Schulbuchverlag
Käpnick, F. (2002): Mathematisch begabte Kinder fördern. – In: Grundschule 34 / 11. S. 12-14.
Seelze: Friedrich Verlag
Käpnick,F. (2002): Was tun mit Matheassen in den Klassen 1 und 2?. -
In: Die Grundschulzeitschrift 160, S. 12-17. Seelze: Friedrich Verlag
Käpnick, F. (2000): Nöte mathematisch begabter Grundschulkinder. In: Geiling, U. (Hrsg.):
Pädagogik, die Kinder stark macht, S.137-148. Opladen: Leske u. Budrich Verlag
Käpnick, F. (2003): Aufgabenformate für die Förderung mathematisch interessierter und
begabter Grundschulkinder. – In: Ruwisch, S./ Peter-Kopp, A. (Hrsg.): Gute Aufgaben im
Mathematikunterricht der Grundschule, S.169-181. Offenburg: Mildenberger Verlag
Kaplan, R. (2004): Die Geschichte der Null. München: Piper Verlag
Kracht, R. (1995): Abenteuertraining Mathematik: Rekorde im Weltall und auf der Erde –
Spielerische Übungen für das 5. Schuljahr. Stuttgart: Klett Verlag
Krauthausen, G. (2009): Kinder machen mathematische Entdeckungen mit Zahlenmauern.
In: Leuders, T. u. a. (Hrsg.), Mathemagische Momente. Situationen fruchtbaren Lernens
und Lehrens von Mathematik – und was hinter ihnen steckt, S. 88–103.
Berlin: Cornelsen / Scriptor Verlag
Langdon, N. / Snape, Ch (1995): Mathematische Schatzkiste. Stuttgart: Klett Verlag
Lehmann, J. (1991): Mathe mit Herz. Leipzig: Urania Verlag
Mason, J. (1985): Hexeneinmaleins: kreativ mathematisch denken.
München: Oldenbourg Schulbuchverlag
Moor, Ed de (1980): Wiskobas bulletin. Leerplanpublikatie 11. Utrecht: IOWO
Müller, G. N. / Wittmann, E. Ch. (1997): Spielen und überlegen –
Die Denkschule – Teil 1. Stuttgart: Klett Verlag
Müller, G. N./Steinbrink, H.,/Wittmann, E. Ch. (2004): Arithmetik im Prozeß.
Seelze: Kallmeyer Verlag
Nobach, I. u.a. (2005): Knobel-Aufgaben für die 3. und 4. Klasse.
Berlin: Cornelsen / Scriptor Verlag
Nolte, M. (2004): Der Mathe-Treff für Mathe-Fans – Fragen zur Talentsuche im Rahmen
eines Forschungs- und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen
im Grundschulalter. Hildesheim, Berlin: Franzbecker Verlag
Peter-Koop, A. (Hrsg.) (2002, 2. Aufl.): Das besondere Kind im Mathematikunterricht
der Grundschule. Offenburg: Mildenberger Verlag
Peter-Koop, A., Sorger, P. (Hrsg.) (2002): Mathematisch besonders begabte Kinder
als schulische Herausforderung. Offenburg: Mildenberger Verlag
Rathgeb-Schnierer, E./Roos, U. (2006): Wie rechnen Matheprofis? – Ideen und Erfahrungen
zum offenen Mathematikunterricht – Festschrift für Sybille Schütte zum 60. Geburtstag.
München u. a.: Oldenbourg Schulbuchverlag
Rinkens, Prof. Dr. H.-D., Hönisch, K. (Hrsg.) (2001): Zahlenwerkstatt – Welt der Zahl –
Knobeln und entdecken – Aufgaben für leistungsstarke Kinder 1./2. Schuljahr.
Hannover: Schroedel Verlag
Roemer, F. (2006): Matheknobeleien 1 – Knobelaufgaben im Zahlenraum bis 100
und im Zahlenraum bis 1000. Schaffhausen: SCHUBI Lernmedien
Ruwisch, S. / Peter-Koop, A. (Hrsg.) (2003): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht
der Grundschule. Offenburg: Mildenberger Verlag
Schulze, E. (1994): Lotte Logo – Knobel-Päckchen. Mülheim an der Ruhr: Verlag an der Ruhr
Snape, Ch./ Scott, H. (1995): Mathematische Wundertüte. Stuttgart: Klett Verlag
Woolley, D. (1999): 5 Minuten Logik-Knacker – Klasse 3 und 4. Mülheim an der Ruhr:
Verlag an der Ruhr

HAMBURG
Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung ■ www.li.hamburg.de