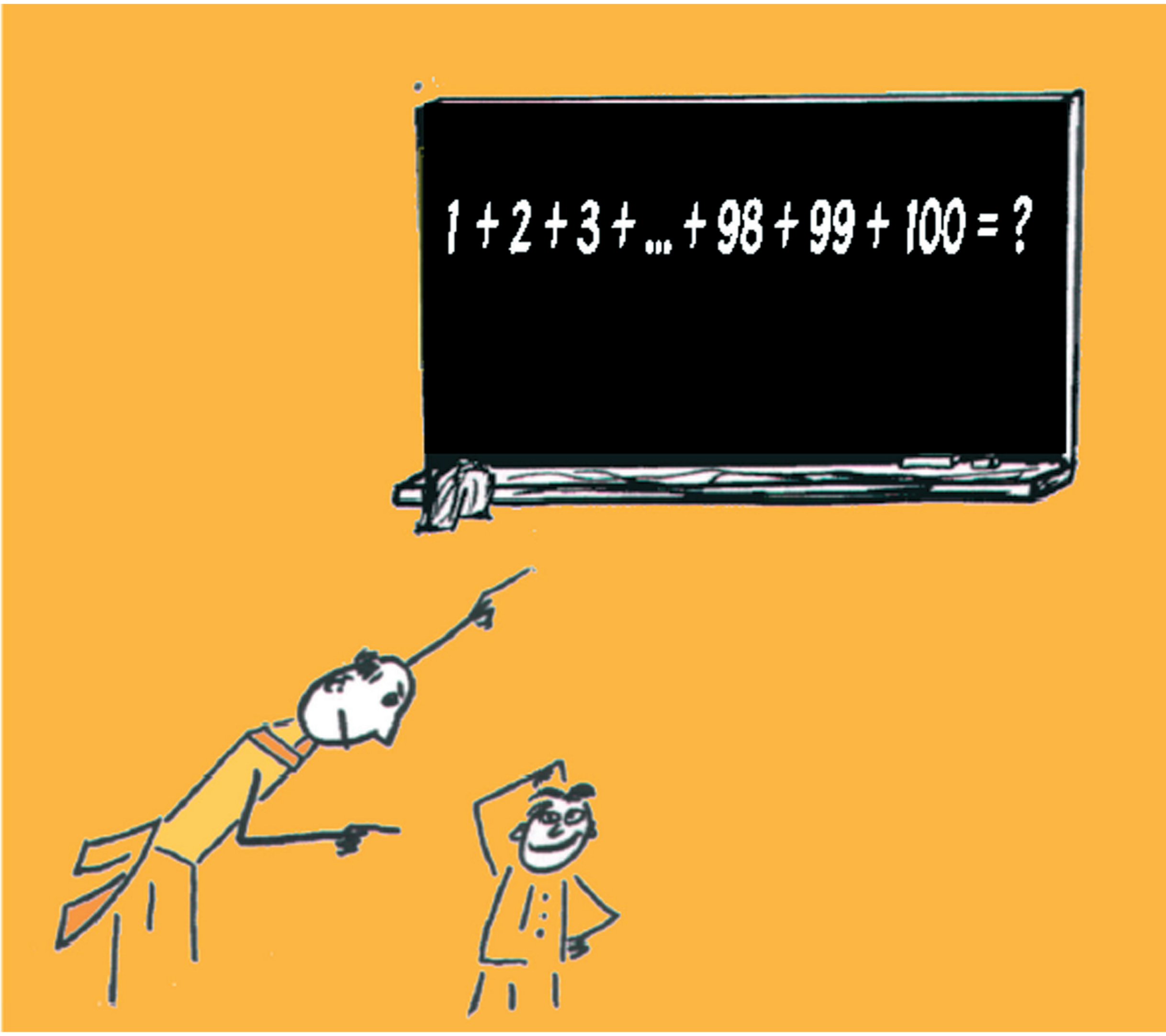
Impulse: Mathematik Grundschule



Schülerzirkel Mathematik

Behörde für
Bildung und Sport

IMPRESSUM

Herausgeber: Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung, Felix-Dahn-Straße 3, 20357 Hamburg

Verfasserin: Annett Neukirchner, Schule Eckerkoppel
unter Mitarbeit von Michaela Kauffeld, Schule Friedrich-Frank-Bogen

Redaktion: Werner Renz, Amt für Bildung, B 22-2

Satz: Annett Neukirchner
Druck: Schüthe-Druck Hamburg

August 2004

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport
Amt für Bildung

Schülerzirkel Mathematik

Handreichung zum Mathematikunterricht der Grundschule

Fachreferent: Werner Renz, Amt für Bildung, B 22-2

Verfasserin: Annett Neukirchner, Schule Eckerkoppel

unter Mitarbeit von
Michaela Kauffeld, Schule Friedrich-Frank-Bogen

August 2004

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

das Fachreferat Mathematik des Amtes für Bildung und die Beratungsstelle besondere Begabungen des Landesinstituts für Lehrerbildung und Schulentwicklung – *BbB* – überreichen Ihnen mit der vorliegenden Aufgabensammlung eine Handreichung zum Mathematikunterricht in der Grundschule. Sie ist Bestandteil einer Reihe von Unterrichtshilfen, die parallel zur Entwicklung und Implementation des Rahmenplans Mathematik für die Grundschule erarbeitet werden.

Eingebettet in das Grundschulprojekt PriMa (Kinder der **Pri**marstufe auf verschiedenen Wegen zur **Ma**thematik) zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Grundschule wurde im Schuljahr 1999/2000 das Forschungs- und Förderprojekt „Besondere mathematische Begabung im Grundschulalter“ unter der wissenschaftlichen Leitung von Frau Prof. Dr. Marianne Nolte, Fachbereich Erziehungswissenschaft der Universität Hamburg, eingerichtet. Zeitgleich dazu wurden zusätzlich Mathematikzirkel an Grundschulen angeboten, die allen Dritt- und Viertklässlern mit Interesse an mathematischen Aktivitäten offen stehen. Die Mathematikzirkel werden von erfahrenen und engagierten Grundschullehrerinnen und -lehrern betreut. Um diese in ihrer anspruchsvollen Tätigkeit zu unterstützen, wurden im (damaligen) Institut für Lehrerfortbildung Fortbildungsveranstaltungen angeboten, in denen konzeptionelle Ansätze zur Entwicklung der Mathematikzirkel und geeignetes Material erarbeitet wurden. Inzwischen dient dieser Arbeitskreis überwiegend dem Austausch über methodisch-didaktische Fragen und der Erprobung von geeigneten Aufgabenstellungen zur Bearbeitung in den Schülerzirkeln.

Die vorliegende Aufgabensammlung ist ein Ergebnis dieser Zusammenarbeit der Zirkelleiterinnen und Zirkelleiter. Die Verfasserin der Handreichung hat dazu geeignete Aufgaben, die im Arbeitskreis vorgelegt, diskutiert und in den Mathematikzirkeln erprobt wurden, ausgewählt, aufbereitet und gegebenenfalls ergänzt. Diese Beispiele sind so angelegt, dass sie verschiedene Lösungswege ermöglichen und auf verschiedene Weise erarbeitet werden können. Im Hinblick auf eine natürliche Differenzierung, z.B. bei Kindern mit besonderen Begabungen, sind auch Bearbeitungen auf unterschiedlichem Niveau möglich. Die Aufgaben sollen die Kinder zur Selbsttätigkeit und zu forschend-entdeckendem Lernen anregen, das sowohl individuell als auch im Austausch mit anderen Kindern stattfinden kann. Eigene Lösungsansätze werden mit denen anderer Kinder verglichen, gemeinsam eingeordnet und bewertet. Von daher werden Arbeitsweisen und die Entwicklung mathematischer Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten gefördert, wie sie auch der neue Rahmenplan Mathematik für die Grundschule vorsieht. Grundsätzlich sind die Aufgabenstellungen über die Zirkelarbeit hinaus geeignet, hin und wieder auch im regulären Mathematikunterricht eingesetzt und erprobt zu werden. Dazu möchten wir alle Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer der Grundschule ermuntern.

Für das Zustandekommen dieser Handreichung ist vielen Kolleginnen und Kollegen zu danken, einmal den Zirkelleiterinnen und Zirkelleitern, die an der Entwicklung und Bearbeitung von geeigneten Aufgabenstellungen mitgewirkt haben und eigene Ideen und Anregungen einbrachten, weiter Frau Prof. Dr. Marianne Nolte und Frau Brigitta Hering (LI), die in der Anfangszeit in der Fortbildung mitarbeiteten, und – natürlich nicht zuletzt – Frau Annett Neukirchner, Leiterin der Fortbildung, die in zeitintensiver Arbeit das Manuskript in die vorliegende Fassung gebracht hat.

Zum Schluss eine Bitte an die Leserinnen und Leser: Wer Hinweise, Anregungen oder Materialien für eine Weiterentwicklung der Handreichung beisteuern kann oder selbst im Arbeitskreis Schülerzirkel Mathematik mitarbeiten möchte, wird gebeten, sich mit uns in Verbindung zu setzen.

Für das Fachreferat Mathematik

Werner Renz

Für die Beratungsstelle besondere Begabungen

Dr. Helmut Quitmann

1 Zur vorliegenden Handreichung

1.1 Schülerzirkel Mathematik

Seit dem Schuljahr 1999/2000 werden in Hamburg an derzeit ca. 25 Schulen regionale Schülerzirkel Mathematik[1] für mathematisch besonders interessierte Kinder der dritten und vierten Klassen angeboten. Diese Zirkel finden in der Regel alle zwei Wochen nachmittags mit Betreuung von entsprechend qualifizierten und engagierten Lehrerinnen und Lehrern statt. Die Zirkel sind ein Bestandteil des Grundschulprojektes „PriMa“ (Kinder der Primarstufe auf verschiedenen Wegen zur Mathematik) und werden getragen von der Beratungsstelle besondere Begabungen des Landesinstituts für Lehrerbildung und Schulentwicklung.

Kinder, die sich gern mit Mathematik und insbesondere mit anspruchsvollen Aufgaben beschäftigen, werden ermuntert, an diesen Zirkeln teilnehmen. Da es keine Aufnahmetests o.ä. gibt, treffen sich in den Zirkeln Kinder mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen. Daraus ergeben sich hohe Anforderungen an die differenzierte Gestaltung der Zirkel.
Dieses ist für die Zirkelleiterinnen und Zirkelleiter eine anspruchsvolle Aufgabe, bei der sie sich in monatlichen Treffen im Landesinstitut gegenseitig unterstützen durch inhaltlichen Austausch.
Diese Fortbildung findet einmal im Monat statt und gibt Anregungen sowie Raum für Diskussionen und den Austausch über gewonnene Erfahrungen. Dabei werden neue Aufgaben vorgestellt, entwickelt, weiterentwickelt und angepasst, es werden Arbeitsmaterialien aufbereitet, Literatur empfohlen und nicht zuletzt Erfahrungen über und mit den Zirkeln ausgetauscht.

Im Rahmen dieser Fortbildung wird jeden Monat eine ausgewählte Aufgabe als so genanntes „Problem des Monats“ an alle Zirkelleiterinnen und Zirkelleiter versandt. Diese Aufgabe wird in der Fortbildung diskutiert und dient als weitere Anregung für die Arbeit mit den Kindern in den Zirkeln.

In dieser Handreichung sind einige solcher Aufgaben zusammengestellt. Ergänzt mit methodischen Hinweisen und Lösungshinweisen sollen sie eine Hilfe u.a. für Zirkelleiterinnen und Zirkelleiter sein, ein Fundus an Aufgaben, der für die Arbeit mit mathematisch interessierten Kindern genutzt werden kann.

1.2 Hinweise zur Handreichung

In vier Kapiteln wird auf jeweils verschiedene Bestandteile der Mathematikzirkel eingegangen, die hier beispielhaft vorgestellt werden sollen. Es werden schwerpunktmäßig Aufgaben behandelt, die

- eine einfach zu erschließende Aufgabenstellung und einen motivierenden Charakter haben.
- einen Lösungsansatz auf der handelnden Ebene ermöglichen,
- es den Kindern ermöglichen, mathematische Zusammenhänge erkennen zu können,
- umfangreiche Denk- und Lernprozesse anregen,
- nicht Bestandteil des regulären Unterrichts sind u.a.m.

Aufgaben, die diese beispielhaft genannten Kriterien (siehe auch 1.3) erfüllen, können verschiedenen Gebieten der Mathematik zugeordnet werden und sind daher schwer unter einem Begriff zusammenzufassen. Darum wird hier der Begriff „**Umfangreichere Aufgaben**“ für diese Aufgaben verwendet. Einige dieser Aufgaben, die Inhalt der Fortbildung waren, werden im **Kapitel 2** vorgestellt und durch Hinweise zur Methodik und zu den Lösungen ergänzt. Die Lösungshinweise sind so gestaltet, dass sie die Arbeit der Zirkelleiterinnen und Zirkelleiter mit den Kindern unterstützen.

Am Ende dieses Kapitels wird ein Beispiel für ein Projekt erläutert. Hierbei handelt es sich um die vertiefende Auseinandersetzung mit dem Spiel „Vier gewinnt“. Die Aufgabe wird beschrieben und es wird darüber hinaus vorgestellt, wie sie von verschiedenen Seiten betrachtet und mit den Kindern ein Wettbewerb entwickelt werden kann. Dieses Vorgehen bietet sehr viele Lernchancen.

Es wurde bei der Vorstellung der umfangreicheren Aufgaben bewusst auf die Erstellung von Arbeitsblättern für alle Aufgaben verzichtet. Die Auseinandersetzung mit den Aufgaben schließt die Überlegungen zur Notation sowie das Entwickeln von übersichtlichen Darstellungen mit ein. Die hierin liegenden Möglichkeiten zur Auseinandersetzung mit den Aufgaben wird in den Zirkeln bewusst gesucht. Umfangreichere Vorlagen und Arbeitsblätter sind dann mit angegeben, wenn es den Kindern nicht möglich ist, diese zu entwickeln oder der Aufwand für die Darstellung gegenüber der Zeit für die inhaltliche Arbeit unverhältnismäßig hoch ist.

Die im **Kapitel 3** vorgestellte **Würfelkartei** ist ein Beispiel dafür, wie in den Zirkeln auf die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen eingegangen wird. Erläuterungen zu dieser Kartei sind dem Kapitel 3 vorangestellt.

Als Einstimmung in die Zirkelveranstaltungen, als Ausklang oder aber unter besonderen Aspekten auch im Hauptinhalt dienen oft kleine Aufgaben, die allgemein als „**Scherz- und Knobelaufgaben**“ bekannt sind. Beispiele für diese Aufgaben werden im **Kapitel 4** vorgestellt.

Im Verlauf der letzten Jahre wurden aus vielen Quellen Anregungen für die Gestaltung der Mathematikzirkel genutzt. Es ist u.U. recht schwierig, für diese Arbeit geeignete Aufgaben zu finden. Um dieses zu

[1] Im Folgenden kurz „Zirkel“ genannt.

erleichtern, wurde im Anhang eine **Literaturliste** angegeben. Hier sind beispielhaft einige Quellen genannt, aus denen weitere Anregungen entnommen werden können.

Die in dieser Handreichung gesammelten Aufgaben wurden von den Zirkelleiterinnen und Zirkelleitern in der Fortbildung zusammengetragen. Es ist die besondere Leistung dieser Arbeitsgruppe, dass die Aufgaben entsprechend den Erfordernissen der Mathezirkel aufbereitet, verändert und weiterentwickelt wurden. Durch diese schöpferische Arbeit an den Aufgaben und ihre wiederholte Weitergabe sind leider nicht mehr alle Quellen genau bekannt. Die Aufgaben sind jedoch für die Arbeit in den Zirkeln sehr gut geeignet und wurden daher trotzdem aufgenommen.

1.3. Methodische Hinweise

Die in dieser Handreichung vorgestellten Aufgaben und insbesondere die Hinweise zur Methodik und zu den Lösungen sind vor dem Hintergrund der Arbeit in den Mathematikzirkeln ausgewählt worden.

Sicher lassen sich die in den Zirkeln gewonnenen Erfahrungen in ähnlichen Arbeitsgemeinschaften, Gruppenarbeiten, Förderprojekten oder im Regelunterricht nutzen.

Damit die Aufgaben und Hinweise eingeordnet, bewertet und so auf ähnliche Gruppen von Kindern übertragen werden können, sollen hier die Grundsätze und Besonderheiten bei der Arbeit in den Zirkeln für mathematisch interessierten Kinder der dritten und vierten Klassen in Hamburg kurz erläutert werden.

In die Zirkel kommen die Kinder mit *sehr unterschiedlichen Voraussetzungen*. Die Kinder entscheiden sich für die Teilnahme, die Zirkelleiterinnen und Zirkelleiter kennen die Voraussetzungen der einzelnen Kinder zunächst nicht. So treffen Kinder mit unterschiedlichsten Fertigkeiten, Fähigkeiten und Gewohnheiten im Zirkel aufeinander. Die Zirkel stehen in der Regel Kindern verschiedener Schulen und der dritten und vierten Klasse offen, was die Heterogenität der Gruppen nochmals erhöht.

Die Zirkelleiterinnen und Zirkelleiter haben Erfahrungen mit verschiedenen Konzepten der Gestaltung gesammelt, in denen dieser Heterogenität entsprochen wird. Die Kinder können sich gegenseitig helfen, Ideen austauschen und Lern- und Lösungswege anderer Kinder nachvollziehen lernen.

Die Inhalte der Zirkel müssen im *Zusammenhang mit dem Schulunterricht* ausgewählt werden. Zum einen müssen sie so gestaltet sein, dass die Voraussetzungen, die die Kinder aus dem Unterricht mitbringen, berücksichtigt werden. Zum anderen soll in den Zirkeln dem Schulunterricht nicht vorgegriffen werden. Die Inhalte der Zirkel können den Unterrichtsstoff ergänzen oder parallel zu diesem liegen.
Die *Aufgaben*[2] sollen so ausgewählt und dargeboten werden, dass möglichst alle Kinder diese bearbeiten möchten und können. Solche Aufgaben zu finden, die dann auch allen Kindern mit ihren oben beschriebenen unterschiedlichen Voraussetzungen gerecht werden, ist schwierig. Eine Möglichkeit sind Aufgaben mit „natürlicher Differenzierung“.

Dieses sind Aufgaben, die in den einzelnen Teilaufgaben ansteigenden Schwierigkeitsgraden gerecht werden. Beispielsweise kann die Aufgabenstellung praktisch erläutert, nachgestellt oder nachgebaut werden. Durch gezielte Strukturierung der Teilaufgaben können die Kinder mit und auch ohne Hilfen größere Zusammenhänge um die Aufgabenstellung finden oder allgemeine mathematische Aussagen erkennen und kindgerecht formulieren.

Ein weiterer Schwerpunkt in der Zirkelarbeit liegt in der Vermittlung und Anwendung von Methoden der Problemlösung.
Zum Beispiel bieten die umfangreicheren Aufgaben vielfach die Gelegenheit, den Umgang mit Tabellen und Diagrammen zu thematisieren und diese anzuwenden. Die Kinder üben, Gedanken und Lösungen so schriftlich festzuhalten, dass sie für andere verständlich sind und damit als Diskussionsgrundlage dienen können. Dabei werden Problemlösestrategien entwickelt und bei anderen Aufgaben wiederholt.

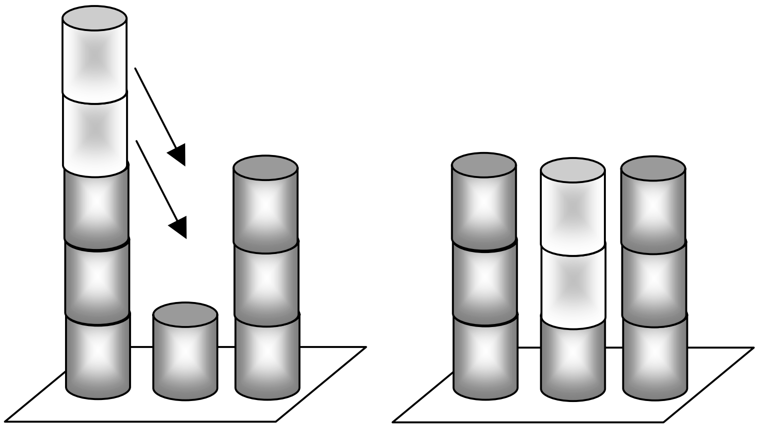
Ausgewählte klassische Aufgaben werden in den Zirkeln aufgegriffen. Die Kinder interessieren sich sehr für Aufgaben, die direkt im Zusammenhang mit der Geschichte oder Persönlichkeiten der Mathematik stehen. So lernen sie über die Aufgaben hinaus Aspekte der Bedeutung der Mathematik kennen.

Es zeichnet die Zirkel aus, dass Aufgaben von mehreren Seiten betrachtet werden. Die Kinder beschäftigen sich intensiv und auf verschiedenen Ebenen mit den Inhalten. Dabei gehört das individuelle Eingehen der Zirkelleiterinnen und Zirkelleiter auf die Kinder genauso zu den Zirkeln, wie die umfangreichen Diskussionen über die Themen, die vielfältigen Methoden und die Offenheit gegenüber neuen Ideen.

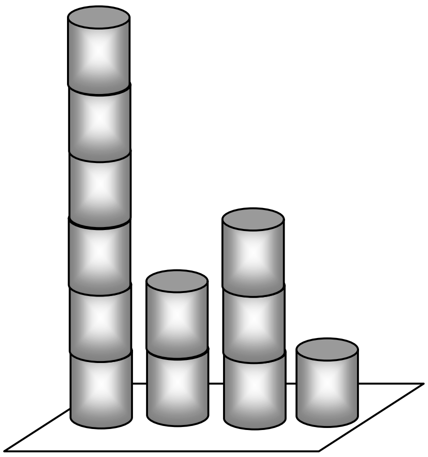
[2] Diese Aufgaben werden in dieser Handreichung „umfangreichere Aufgaben“ genannt.

2. Umfangreichere Aufgaben

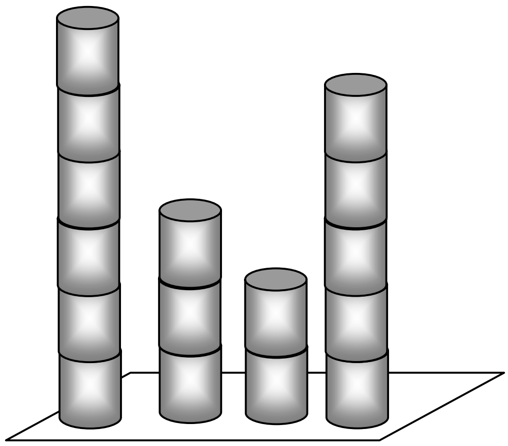
2.1 Das knifflige Dosenstapeln



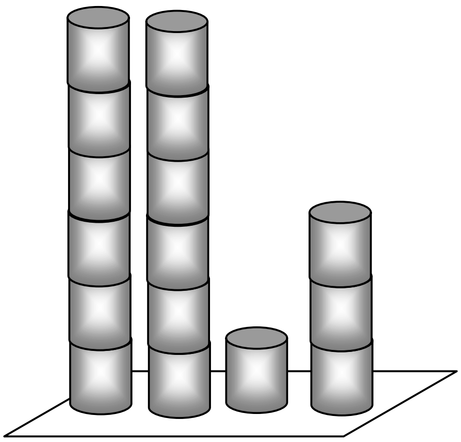
Beispiel:
Die drei Türme sind nach einmaligem Umbauen gleich hoch. Dazu werden vom linken Turm zwei Dosen genommen und auf den mittleren Turm gestellt.
Einmal Umbauen heißt: Dosen von einem Turm wegnehmen und auf einen anderen Turm stellen.



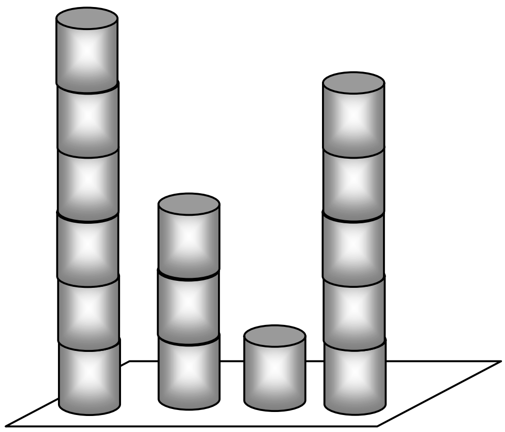
1. Nach zweimaligem Umbauen sollen die vier Türme gleich hoch sein.



2. Nach zweimaligem Umbauen sollen die vier Türme gleich hoch sein.



3. Kannst du die Türme so umbauen, dass gleich hohe Türme entstehen? Wie oft musst du umbauen?



4. Kannst du die Türme so umbauen, dass gleich hohe Türme entstehen? Wie oft musst du umbauen?

Anregung aus: Radatz, H., Rickmeyer, K.: Aufgaben zur Differenzierung, Schroedel Verlag.

ZUR AUFGABE
Diese Aufgabe eignet sich sehr gut für die Arbeit in Gruppen von Kindern mit unterschiedlichen Erfahrungen beim Lösen von umfangreicheren Aufgaben. Sie bietet die Möglichkeit, auf verschiedenen Wegen an die Lösung heranzugehen. Die Kinder können sie durch Ausprobieren und Nachbauen, durch Zeichnen oder allein durch Überlegungen bearbeiten. Auch eignet sich diese Aufgabe als Anregung für die Kinder, eigene Aufgaben dieser Art zu entwickeln.

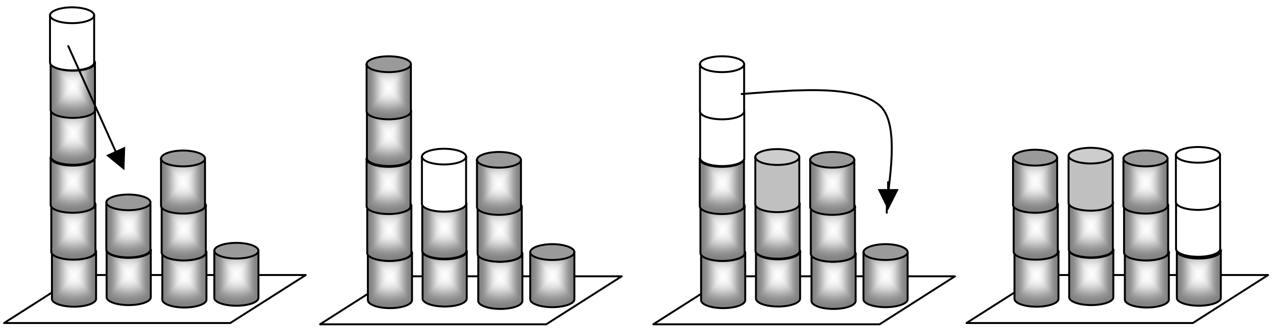
METHODISCHE HINWEISE:
Vorab sollte mit den Kindern geklärt werden, was unter einem „Umbau“ zu verstehen ist. Dazu kann die Erklärung aus dem Beispiel genutzt werden.
Die Kinder sollten Material zur Verfügung haben, um die Türme nachbauen zu können.

Umfangreichere und schwierigere Aufgaben als Weiterführung sind leicht durch die Kinder zu entwickeln. Beispiele für solche Aufgaben sind:
- Baue aus 24 Dosen sechs Türme so auf, dass du durch zweimaliges Umbauen sechs Türme gleicher Höhe bekommst.
- Sechs Türme, ein Viererturm, ein Fünferturm, zwei Sechsertürme, ein Siebenerturm und ein Achterturm sollen so umgebaut werden, dass alle Türme gleich hoch sind. Wie hoch werden die Türme?
- Zwei Zweiertürme und ein Dreierturm sollen so umgebaut werden, dass drei gleich hohe Türme entstehen. Was fällt dir auf?
- ...

Das Verfahren der Durchschnittsbildung, das Erwachsenen bei der Lösung dieser Aufgaben rasch hilft, ist den Kindern in der Regel noch nicht geläufig.
Durch diese Aufgabe bietet sich eine Möglichkeit, dieses Verfahren praktisch zu erarbeiten und später rechnerisch anzuwenden. Damit können die Kinder bereits vor dem Umbauen entscheiden, ob eine Lösung möglich ist.

LÖSUNGSHINWEISE
Für die lösbaren Aufgaben lässt sich die Höhe der Türme nach dem Umbauen über die Durchschnittsbildung finden. Dazu wird die Anzahl der Dosen aller Türme einer Aufgabe addiert und durch die Anzahl der Türme dividiert. Damit erhält man die gewünschte Anzahl von Dosen, wenn alle Türme gleich hoch sein sollen und kann dann herausfinden, welche Dosen umgebaut werden müssen. Insbesondere bei größeren Anzahlen von Türmen und Dosen ist dies ein gutes Verfahren, während es bei Aufgaben mit geringen Anzahlen noch nicht notwendig ist, weil die Türme anschaulich schnell erfasst werden können.

Lösung zu Aufgabe 1:



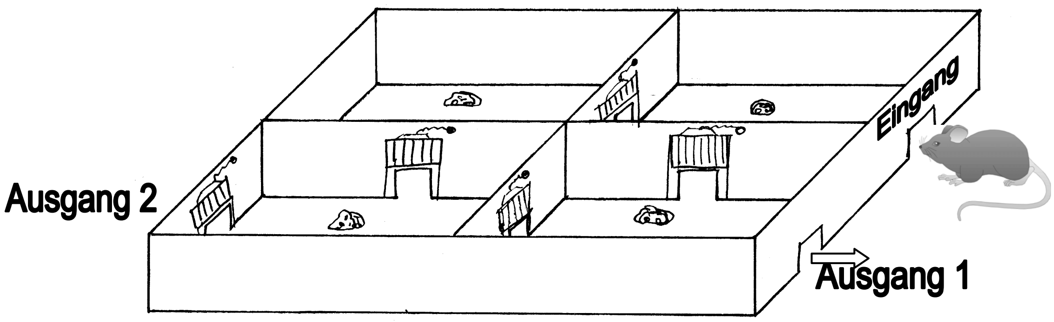
erster Umbau zweiter Umbau

oder:
6 Dosen + 2 Dosen + 3 Dosen + 1 Dose = 12 Dosen
zu verteilen auf vier Türme: 12 : 4 = 3
3 Dosen je Turm

Für die anderen Aufgaben erfolgt die Lösung entsprechend. Da sie recht einfach zu lösen sind, soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Für Aufgabe 4 gibt es keine Lösung, da die Summe aller Dosen (15 Dosen) nicht gleichmäßig auf vier Türme verteilt werden kann.

2.2 Das Käselabyrinth



Die Maus Freddy sitzt vor dem Eingang des Käselabyrinths.

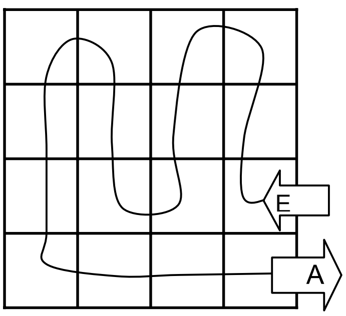
Das Labyrinth besteht aus mehreren Zimmern, die alle durch Türen miteinander verbunden sind. In jedem Zimmer befindet sich ein Stück Käse.

Freddy möchte alle Stückchen Käse fressen und dann durch einen der Ausgänge wieder aus dem Labyrinth nach draußen gelangen.

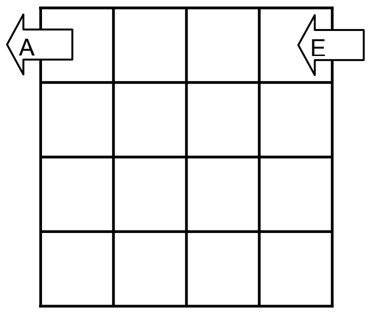
Dabei gibt es nur eine Schwierigkeit: Immer, wenn jemand durch ein Zimmer hindurch gelaufen ist, schließen sich alle Türen zu diesem Zimmer. Freddy muss also einen Weg finden, bei dem er durch jedes Zimmer genau einmal hindurchläuft. Kann ihm das gelingen?

Hier gibt es einige größere Labyrinthe.
Suche einen Weg, der genau einmal durch jedes Feld führt! E=Eingang A=Ausgang

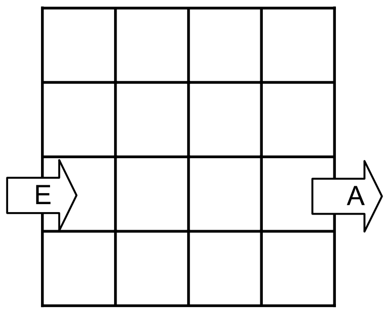
Beispiel:



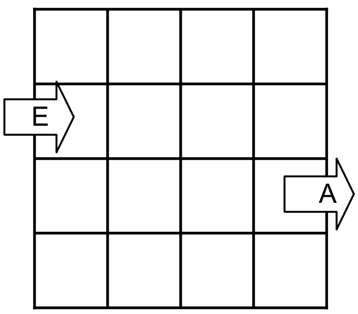
Labyrinth 1



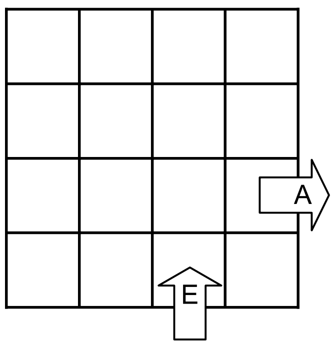
Labyrinth 2



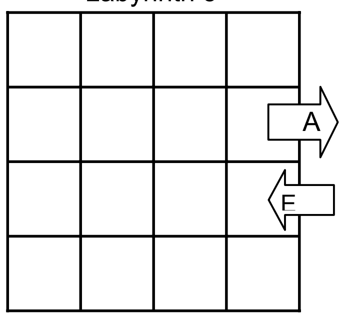
Labyrinth 3



Labyrinth 4



Labyrinth 5



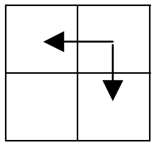
ZUR AUFGABE

Diese Aufgabe ist recht einfach und dabei sehr motivierend für die Kinder zu bearbeiten. Die Kinder können ihre Lösungswege ausprobieren und leicht ähnliche Aufgaben entwickeln.

METHODISCHE HINWEISE:

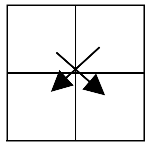
Die Abbildung des Labyrinthes mit der Maus auf der vorangegangenen Seite kann als Einstieg in diesen Aufgabentyp dienen. Dabei sollte mit den Kindern diskutiert und ausprobiert werden, ob beide Ausgänge erreicht werden können, wenn jedes Zimmer genau einmal durchlaufen werden soll.

Dabei erschließt sich (fast nebenbei) für die nachfolgenden Aufgaben, dass benachbarte Räume nur über die Seiten und nicht über die Ecken erreicht werden können, weil sich dort keine Türen befinden.



erlaubt

nicht erlaubt

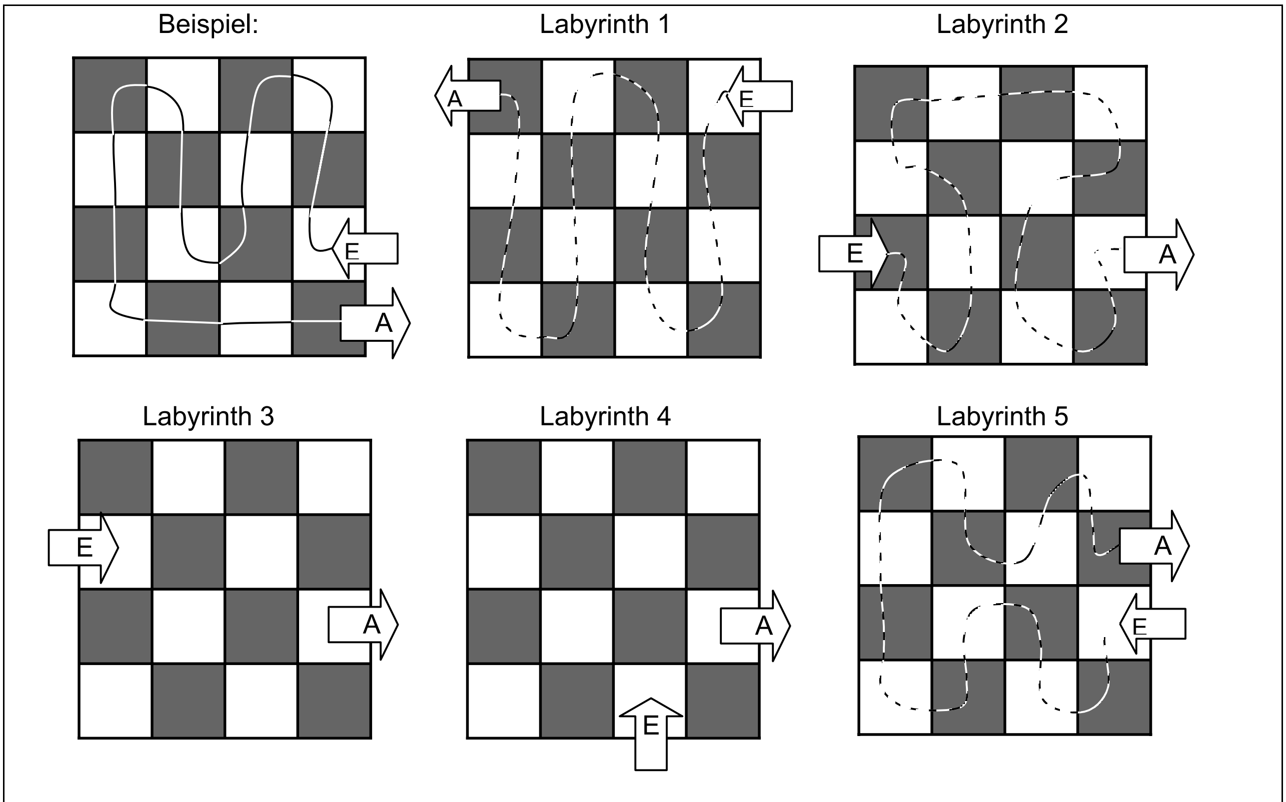


Die Labyrinthe 1 bis 5 sollten durch die Kinder selbstständig gelöst werden. Dabei werden sie feststellen, dass nicht alle Labyrinthe in der geforderten Weise durchlaufen werden können.

Die Kinder sollten entweder in Gruppen oder im Plenum versuchen, eine Methode zu finden, mit der entschieden werden kann, unter welchen Bedingungen Labyrinthe in der geforderten Art und Weise durchschritten werden können. Ein hilfreicher Tipp kann hierbei sein, dass die Labyrinthe wie ein Schachbrett in schwarze und weiße Felder gefärbt und dann die Wege betrachtet werden sollen.

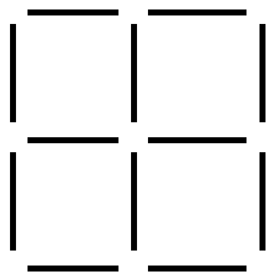
LÖSUNGSHINWEISE

Wird das Labyrinth des Beispiels wie ein Schachbrett gefärbt, lässt sich folgendes erkennen:
Das Eingangsfeld ist weiß, das Ausgangsfeld ist schwarz.
Der Weg führt immer abwechselnd über ein schwarzes und dann über ein weißes Feld.
Hier bei diesen Labyrinthen gibt es 16 Felder, eine gerade Anzahl. Wenn immer abwechselnd über ein schwarzes und über ein weißes Feld gegangen werden muss und das Eingangsfeld ein weißes war, muss das Ausgangsfeld ein schwarzes Feld sein.
Wenn das nicht so ist, wie in den Labyrinthen 3 und 4, kann es also keine Lösung geben.
Für die anderen Labyrinthe ist hier eine Lösung angegeben.



2.3 Knobeln mit Streichhölzern

Aus 12 Streichhölzern werden Quadrate gelegt.



a) Nimm zwei Streichhölzer weg, ohne die übrigen zu bewegen, so dass du zwei verschieden große Quadrate erhältst!

b) Lege drei Streichhölzer so um, dass drei gleich große Quadrate entstehen!

c) Lege vier Streichhölzer so um, dass drei gleich große Quadrate entstehen!

Idee nach: Lehmann, J.: 2 mal 2 plus Spaß dabei, Volk und Wissen, 1989.

ZUR AUFGABE

Diese Aufgabe ist ein Beispiel für eine Fülle von ähnlichen Aufgaben, die mit dem Legen von Streichhölzern o.ä. das geometrische Denken und das Vorstellungsvermögen schulen.
Hier soll nur auf diese Aufgabe eingegangen werden, obwohl es sicher sinnvoll wäre, des öfteren solche Aufgaben in den Zirkeln zu bearbeiten. Anregungen hierzu sind bereits in einer Handreichung veröffentlicht worden und können so für die Arbeit genutzt werden.

Literaturtipp:
Behörde für Bildung und Sport der Freien und Hansestadt Hamburg, Verfasserin: Jana Dartsch, Fachreferent: Werner Renz: Knobeleien mit Streichhölzern (Handreichung), November 2002.

Eine umfangreichere Aufgabe mit gleichzeitig höherem Schwierigkeitsgrad, die sich gut für die Arbeit im Zirkel nach der Bearbeitung dieser Aufgaben eignet, ist die Aufgabe „Dreiecke aus Streichhölzern“ in dieser Handreichung.

METHODISCHE HINWEISE:

Für alle diese Aufgaben sollten den Kindern abgebrannte Streichhölzer, Stäbchen o.ä. zur Verfügung stehen.
Die Phase des praktischen Ausprobierens der Aufgaben ist für die Durchdringung der Aufgaben sehr wichtig. Manche Kinder mögen lieber die einzelnen Hölzer aufmalen, sehen dabei aber zumeist schnell, dass sie beim „Umlegen“ viel radieren müssen.

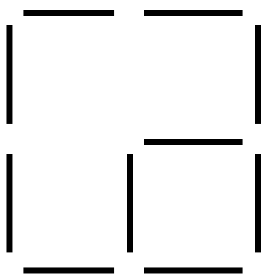
Die verwendeten Begriffe sollten miteinander geklärt werden, damit beim Lösen der Aufgaben keine unnötigen Schwierigkeiten auftreten und damit eine leichte Kommunikation über die Aufgaben möglich ist. Denkbar wäre, dass nicht allen Kindern der Begriff „Quadrat“ genau bekannt ist. Auch sollte die genaue Bedeutung von „umlegen“ und „wegnehmen“ mit allen Kindern geklärt werden.

Vorab kann es je nach den Vorerfahrungen der Kinder hilfreich sein, die Figur in der Aufgabenstellung gemeinsam zu betrachten und herauszuarbeiten, dass es sich dabei nicht nur um vier kleine, gleich große Quadrate, sondern ebenfalls um ein großes Quadrat handelt.

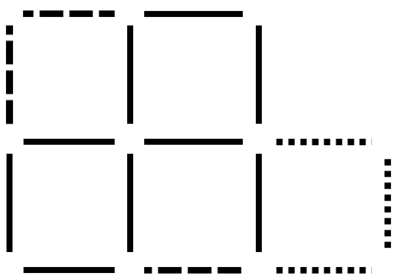
Diese Aufgabe kann im Schwierigkeitsgrad gesteigert werden, wenn die Kinder selbst ähnliche Aufgaben für die anderen Kinder notieren.
Es ist ebenso möglich, nur die Anzahl der nach dem Umlegen entstandenen Figuren anzugeben und nicht die Anzahl der umzulegenden Hölzer. Dadurch entstehen mehrere Lösungsmöglichkeiten, die untereinander diskutiert werden können.

LÖSUNGSHINWEISE

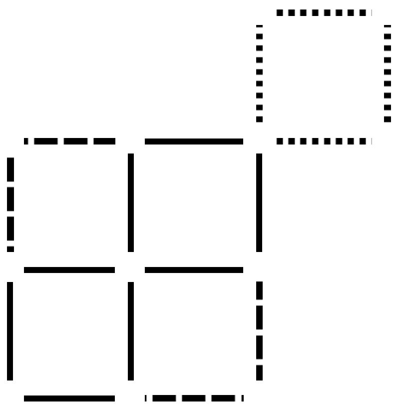
a) Hier wurden zwei Hölzer weggenommen, so dass zwei verschieden große Quadrate entstehen.



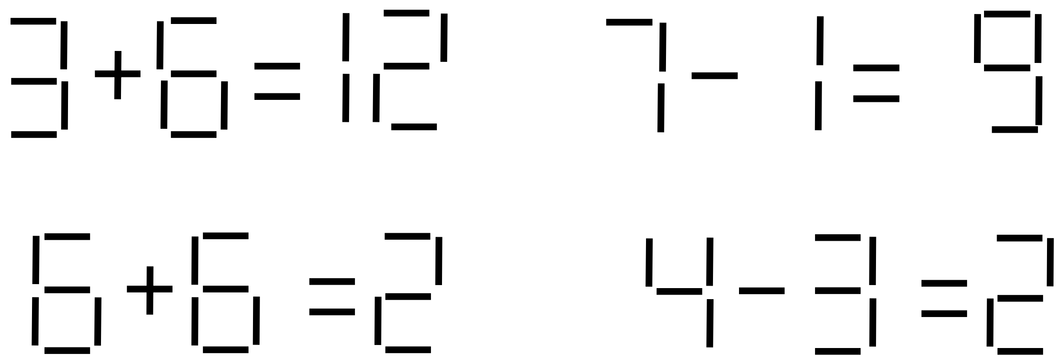
b) Hier werden die drei gestrichelt gezeichneten Hölzer genommen und an die gepunktet dargestellten Linien gelegt.



c) Hier sollen nun ebenfalls, wie in b) drei Quadrate entstehen, jedoch sollen dafür genau vier Hölzer umgelegt werden. Die gestrichelt gezeichneten Hölzer werden genommen und zu dem gepunktet dargestellten Quadrat ergänzt.



Gleichungen mit Streichhölzern



Lege in jeder Gleichung ein Streichholz so um,
dass eine richtig gelöste Aufgabe entsteht.

aus: Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler, Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften Klasse 3.

ZUR AUFGABE

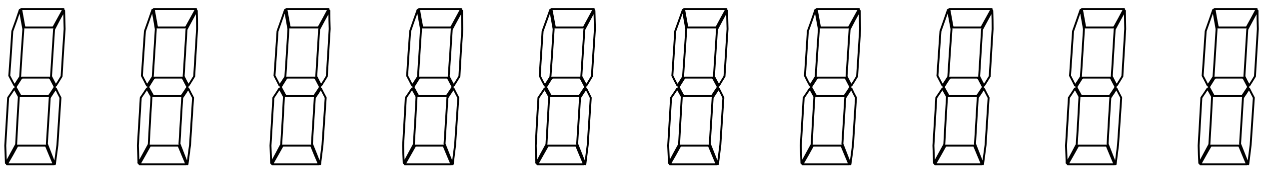
Diese Aufgabe wird von den Kindern in der Regel schnell verstanden. Deshalb ist sie besonders gut für die ersten Veranstaltungen eines neuen Mathematikzirkels geeignet. Das für viele Kinder anspruchsvolle Knobeln an trotzdem einfachen Gleichungen motiviert sehr. Einige Kinder geben allerdings zu schnell wieder auf, so dass diese Aufgabe auch zur Schulung der Ausdauer einen Beitrag leisten kann.

METHODISCHE HINWEISE:

Nachdem die Kinder erst einmal die Aufgaben zu lösen versucht haben, kann man gemeinsam mit ihnen Lösungswege überlegen.
Die Kinder sollten ihre gefundenen Strategien, noch nicht die Lösungen, vorstellen. Dazu ist vorher anzuregen, dass die Überlegungen in eine für andere nachvollziehbare Form gebracht werden.

Hier soll eine mögliche Herangehensweise vorgestellt werden.
Man kann sich der Lösung z.B. nähern, indem man notiert, wie die Ziffern in digitaler Schreibweise aussehen und welche Ziffern man überhaupt durch Veränderung eines Streichholzes in eine andere Ziffer umwandeln kann.

Einige Kinder lesen die Digitalzahlen zwar sicher, haben aber noch Schwierigkeiten, sie aufzuschreiben. Diese Kinder könnten dann mit der Lösung der Aufgaben überfordert sein. Für sie wird es hilfreich sein, sich die Ziffern zuerst einmal anhand folgender Grafik selbst „aufzuschreiben".



Durch das Ausmalen der entsprechenden Felder werden die Ziffern dargestellt.

Für die Lösung der Aufgabe ist es hilfreich, sich zu überlegen, welche Ziffern durch die Veränderung eines Streichholzes in eine andere Ziffer umgewandelt werden können.

Dazu kann eine Tabelle angelegt werden:

Ziffer		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
In diese Ziffern kann die obere Ziffer verwandelt werden:	durch Umlegen eines Streichholzes	-									
	durch Hinzulegen eines Streichholzes	7									
	durch Wegnehmen eines Streichholzes	-									

Das Ausfüllen dieser Tabelle übt das systematische Vorgehen, kann aber bei dieser Aufgabe von den Kindern auch als umständlich empfunden werden. Ob sie benutzt werden soll oder als Möglichkeit angeboten wird, sollte von den Vorerfahrungen der Kinder abhängig gemacht werden.

Nach solchen gemeinsamen Überlegungen zu möglichen Lösungsstrategien wird das Lösen der Aufgaben den meisten Kindern keine Schwierigkeiten mehr bereiten.

Diese Art der Aufgaben bietet sehr gute Möglichkeiten, die Kinder selbst eigene Aufgaben erstellen zu lassen und diese anschließend gegenseitig zu lösen. Eine mögliche Aufgabenstellung dafür kann sein: „Finde eine solche Aufgabe, die niemand aus dem Zirkel lösen kann“.

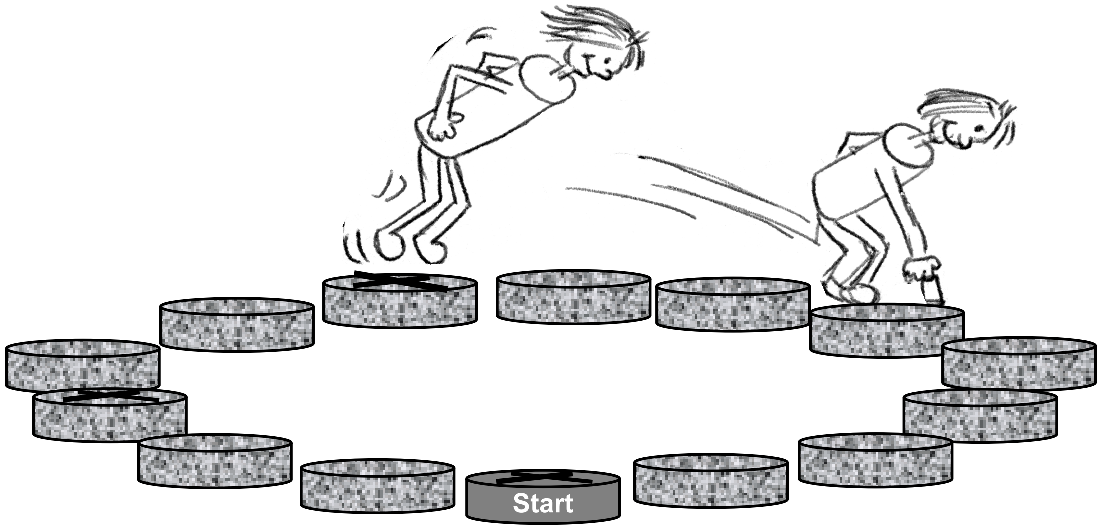
LÖSUNGSHINWEISE

Die grauen Zahlen und Zeichen zeigen, wo etwas verändert wurde. Die Aufgabe 6 + 6 = 2 ist insofern besonders, da hier auch das Operationszeichen (+) verändert wird.

3 + 9 = 12 7 - 1 = 6

8 - 6 = 2 4 - 2 = 2

2.4 Der Hüpfkreis



Maria hüpft im Kreis herum.
Sie landet auf jedem dritten Stein und macht dort ein Kreuz.
Maria merkt, dass sie nach drei Runden auf jedem Stein ein Kreuz gemacht hat.

1. Ist das richtig?
2. Jetzt zeichnet sie auf jeden vierten Stein ein Kreuz. Was passiert nun? Erkläre!
3. Jetzt zeichnet sie das Kreuz auf jeden fünften Stein. Was passiert nun? Erkläre!
4. Jetzt zeichnet sie das Kreuz immer nach 84, 90, 101, 147 Sprüngen. Bei welchen Zahlen wird sie auf allen Steinen ein Kreuz zeichnen und bei welchen nicht?
5. Untersuche was passiert, wenn man den Kreis vergrößert oder verkleinert! Nimm also nicht 14 Steine, sondern mehr oder weniger Steine! Bei welchen Zahlen wird sie nun auf allen Steinen ein Kreuz zeichnen, wenn sie nur lange genug springt?

Literatur: Aufgabenidee nach Shell Centre for Mathematical Education (1984). Problems with Patterns and Numbers, Masters for Photocopying.

ZUR AUFGABE
Diese Aufgabe ist sehr gut für die Arbeit in den Mathezirkeln geeignet. Der Einstieg in die Aufgabe kann handlungsorientiert gestaltet werden. Das erhöht die Motivation der Kinder sehr und es erleichtert ihnen, die Aufgabe zu verstehen. Die folgenden Bearbeitungsschritte liegen auf immer höheren Abstraktionsebenen, die aber von den Kindern selbst gewählt und so leicht angenommen werden.
Anhand dieser Aufgabe kann das Arbeiten mit Tabellen geübt werden.
Die Kooperation der Kinder miteinander bei der Lösung der Aufgabe ist sehr hilfreich und wird von den Kindern als sehr motivierend empfunden.

METHODISCHE HINWEISE:
Diese Aufgabe sollte dann im Zirkel bearbeitet werden, wenn es das Wetter zulässt, draußen den Hüpfkreis aufzuzeichnen. Die Kinder können dann die Aufgabe selbst nachspielen, was ihnen sehr viel Spaß bereitet. Dabei kann jeder dritte Stein mit einem Kreuz versehen oder aber durch Steine o.ä. markiert werden. Für die zweite Teilaufgabe (jeder vierte Stein) ist dann entweder eine neue Kreidefarbe nötig oder die Steine werden wieder aufgenommen und neu gelegt. Die verschiedenen Farben bieten den Vorteil, dass die unterschiedlichen Ergebnisse zu sehen sind, können aber, wenn sich ein Kind verzählt hat, auch nur schwer korrigiert werden.

Die immer mehr zu überspringenden Steinanzahlen können bald nicht mehr übersprungen werden. Die Kinder kommen in der Regel selbst auf die Idee, den Hüpfkreis dann aufzuzeichnen. Es können auch Vorlagen bereitgestellt werden.
Dabei sollten verschiedene Hüpfkreise betrachtet werden, zum Beispiel Hüpfkreise mit 10, 11, 12, 13, 14 und 15 Steinen.

Mit den Kindern muss besprochen werden, dass die gefundenen Lösungen für jeweils eine bestimmte Anzahl von Steinen und den verschiedenen Sprunglängen später noch benötigt werden. Die Kinder müssen sich also eine geeignete Notationsform überlegen. In einer Tabelle können die Ergebnisse sehr übersichtlich dargestellt werden. Zwei Beispiele sind unten angegeben.

Es wird eingetragen, ob jeweils auf allen Steinen einmal gelandet wird.
+ : auf jedem Stein wird einmal gelandet.
– : es wird nicht auf jedem Stein gelandet.

Sprungzahl (Landung auf jedem ... Stein)	Landet man auf jedem Stein, wenn der Hüpfkreis ... Steine hat?						
	14 Steine	15 Steine	16 Steine	13 Steine	12 Steine	...	...
1.	+						
2.	–						
3.	+						
4.	–						
5.	+						
6.	–						
7.	–						
8.	–						
9.	+						
10.	–						
11.	+						
12.	–						
13.	+						
14.	–						

Alternativ kann für jeden Hüpfkreis eine Tabelle erstellt werden.

Der Hüpfkreis hat 14 Steine

Sprungzahl (Landung auf jedem ... Stein)	Landet man auf jedem Stein?
1.	+
2.	–
3.	+
4.	–
5.	+
...	

Der Hüpfkreis hat 15 Steine

Sprungzahl (Landung auf jedem ... Stein)	Landet man auf jedem Stein?
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
...	

Der Hüpfkreis hat 13 Steine.

Sprungzahl (Landung auf jedem ... Stein)	Landet man auf jedem Stein?
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
...	

Damit die Kinder eine allgemein gültige Lösung finden können, ist eine Anzahl von einzelnen Ergebnissen notwendig. Anfangs zählen sie noch motiviert, dies wird aber mit der Zeit langweilig. Da die Ergebnisse jedoch benötigt werden, hat es sich bewährt, die Tabelle groß im Raum anzubringen oder zu zeichnen. Die Kinder können nun einzelne Aufgaben auswählen, bearbeiten und die Ergebnisse eintragen. Dabei ist es sinnvoll, abzusprechen, wer welche Teilaufgabe löst. Dieses sollte, damit keine Aufgabe doppelt gelöst wird, mit einem vereinbarten Zeichen in der Tabelle vermerkt werden.

Wenn die Tabelle ausgefüllt ist, versuchen die Kinder herauszufinden, wie sich, ohne es auszuzählen, feststellen lässt, ob bei einer bestimmten Stein- und Sprungzahl[3] auf jedem Stein gelandet wird oder nicht.
Dieses kann in Gruppenarbeit oder mit der gesamten Gruppe vor der Tabelle erfolgen.

Als Möglichkeit für das Sammeln der Ergebnisse bietet sich die Tabelle an. Um aber den allgemeinen Zusammenhang zu finden, ist sie für manche Kinder zu umfangreich.
Dazu kann es nun hilfreich sein, sich die Ergebnisse einzeln anzusehen. Es wird jeweils notiert, welche Sprungzahl dazu führt, dass auf jedem Stein gelandet wird.

14 Steine: 1, 3, 5, 9, 11, 13

Daneben kann entsprechend notiert werden, welche Sprungzahlen dazu führen, dass nicht auf jedem Stein gelandet wird.

14 Steine: 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14

Wenn dieses für einige verschieden große Hüpfkreise erfolgt, finden die Kinder oft eine Lösung. Diese sollte dann noch an einigen Beispielen ausprobiert (kontrolliert) werden.
Hierbei bietet sich auch die Möglichkeit, über die beim Auszählen entstehenden Muster zu sprechen. So wird manchmal auf jedem zweiten Stein gelandet, dabei entsteht ein Muster, bei dem jeder zweite Stein ein Kreuz hat o.ä.

LÖSUNGSHINWEISE

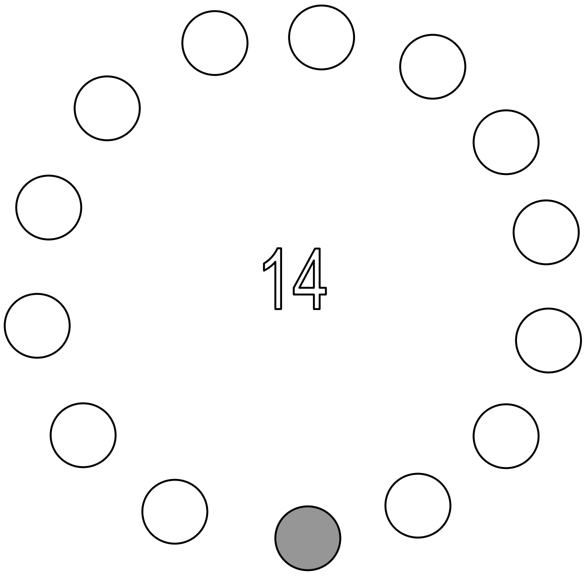
Wenn für den Hüpfkreis mit 14 Steinen die Sprungzahlen verglichen werden, die dazu führen, dass nicht auf jedem Stein einmal gelandet wird, lässt sich herausfinden, dass jede dieser Zahlen einen Teiler mit 14 gemeinsam hat.
Entsprechendes gilt für die anderen Hüpfkreise.

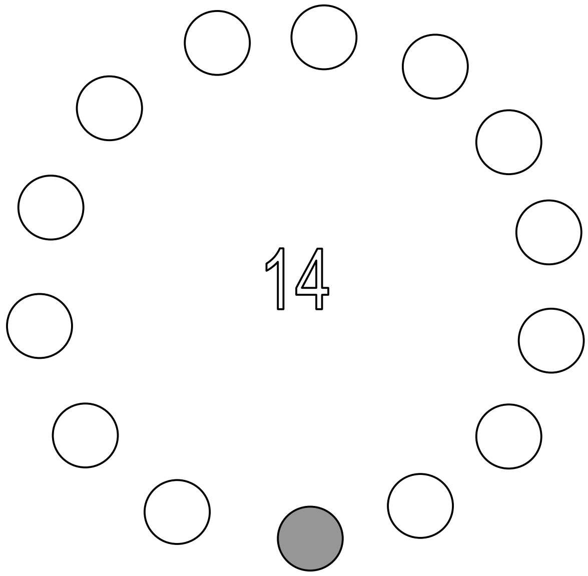
Betrachtet man die Sprungzahlen, die dazu führen, dass auf jedem Stein einmal gelandet wird, sieht man, dass jede dieser Zahlen und die 14 teilerfremd sind. Dieser Begriff wird den Kindern voraussichtlich nicht bekannt sein. Oft finden sie aber sehr gute Beschreibungen dieses Begriffes.

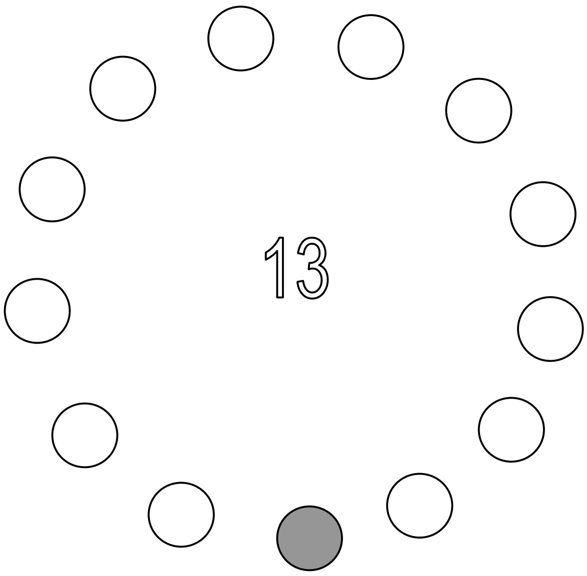
Will man also bestimmen, ob für einen bestimmten Hüpfkreis eine Sprungzahl dazu führt, dass auf allen Steinen einmal gelandet wird, muss man untersuchen, ob die Anzahl der Steine des Hüpfkreises und die Sprungzahl gemeinsame Teiler haben.

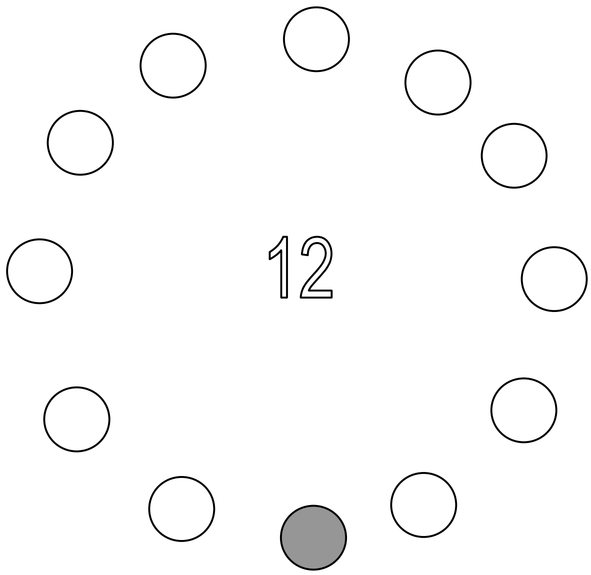
➔ Auf der folgenden Seite sind verschiedene Hüpfkreise für die Arbeit mit den Kindern abgebildet.

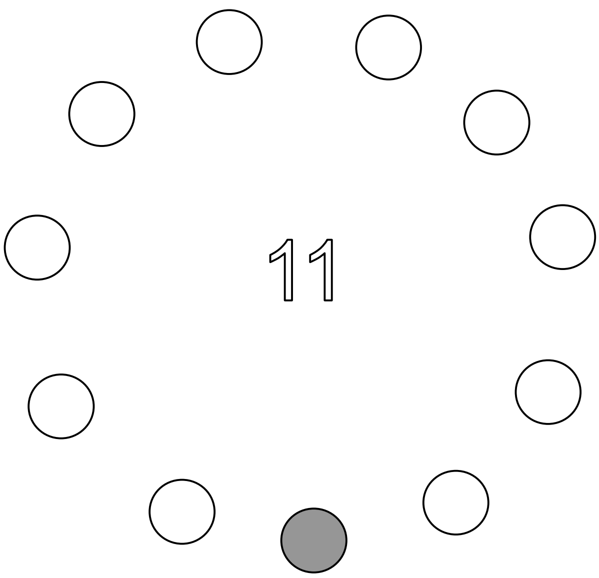
[3] „Sprungzahl" meint im Folgenden immer die Zahl, die angibt, auf dem wievielten Stein gelandet wird. Die Sprungzahl 3 bedeutet zum Beispiel, dass auf jedem dritten Stein gelandet wird.

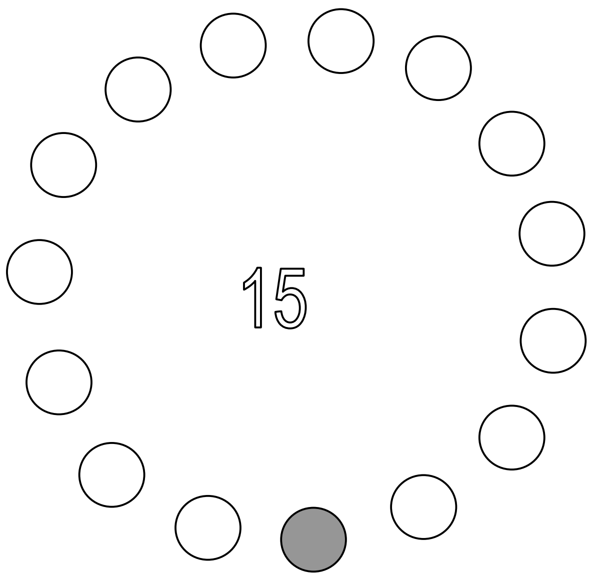

14


14

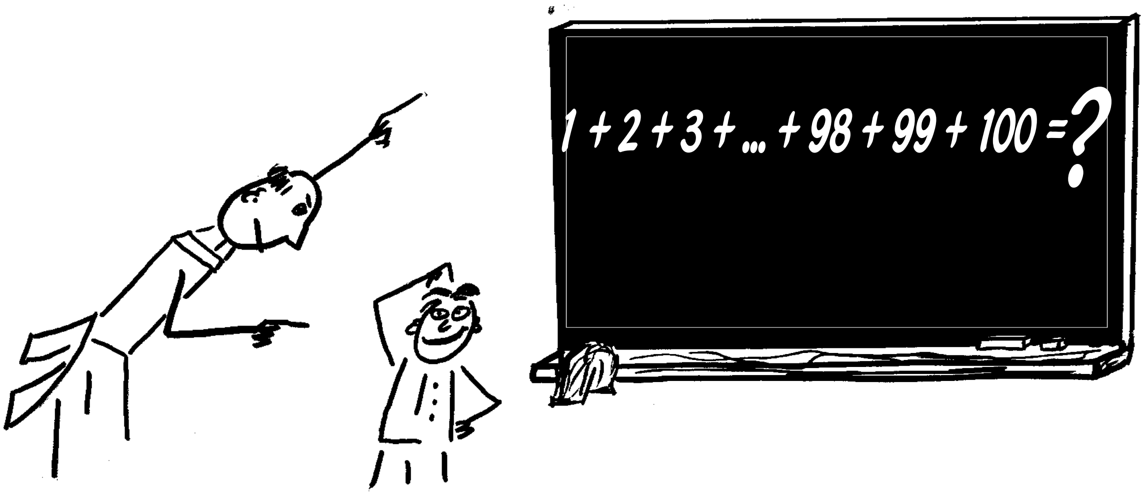

13


12


11


15

2.5 Der König der Mathematik



Vor ungefähr 200 Jahren hat ein deutscher Lehrer seinen Schülern diese Aufgabe gestellt. Es gibt eine Methode, die Summe zu errechnen. Der Lehrer kannte die Methode, die Schüler aber nicht. Das glaubte der Lehrer zumindest.
Der Lehrer hatte sich wahrscheinlich auf eine lange Ruhepause gefreut, in der die Schüler dasaßen und rechneten. Aber daraus wurde nichts. Das jüngste Kind, Karl Friedlich Gauß, kam bald nach vorn und übergab dem Lehrer seine Schreibtafel. (Im 18. Jahrhundert schrieben die Kinder mit einem Griffel – einer Art quietschender „Kreide“ - auf Schiefertafeln.)
Auf der Tafel stand die richtige Antwort.
Karl Friedrich Gauß, der erst neun Jahre alt war, wusste offenbar, dass man nicht Zahl für Zahl zusammenzählen muss. Das hatte ihm niemand beigebracht. Er selbst war auf die Methode gekommen, wie man die Summe einfacher errechnet.
Findest du auch eine Methode?

Text nach: Dahl, K., Nordquist, S.: Zahlen, Spiralen und magische Quadrate, Verlag Fr. Oetinger, Hamburg.

ZUR AUFGABE
Diese Aufgabe gehört zu den bekannteren, klassischen Aufgaben. Sie zielt auf eine bestimmte Lösung, ist also weniger offen als andere, in diesem Heft vorgestellte Aufgaben. Sie ergänzt die Vielfalt der möglichen Aufgaben und motiviert die Kinder sehr. Wenn die Kinder die Lösungsmethode verstanden haben, können sie diese auf ähnliche Aufgaben anwenden. Sie bietet ein gutes Beispiel dafür, dass es sinnvoll sein kann, selbst bei einer offensichtlichen Aufgabe nicht gleich mit dem Rechnen zu beginnen, sondern sich die Zahlen erst einmal anzusehen und über einen effektiveren Rechenweg nachzudenken.

METHODISCHE HINWEISE:
Nachdem sichergestellt wurde, dass die Kinder die Aufgabenstellung verstanden haben, was hier vermutlich nicht viele Probleme mit sich bringen dürfte, sollten die Kinder die Aufgabe selbstständig bearbeiten. Dabei können sie allein oder mit einem Partner arbeiten. Sie sollten ihren Rechenweg und ihre Ergebnisse so darstellen, dass die anderen Kinder diesen anschließend nachvollziehen können. Dies ist eine gute Gelegenheit, sich über die verschiedenen Möglichkeiten der Notation auszutauschen. Nachdem alle Kinder ihre Ergebnisse vorgestellt haben, kann, wenn noch kein Kind auf die „gaußsche“ Lösungsmethode gekommen ist, die Reihe der zu addierenden Zahlen eingeschränkt werden. An solch einem Beispiel mit weniger Zahlen und daher leichteren Rechnungen kann der Lösungsweg mit den Kindern erarbeitet werden. Anschließend wird der Lösungsweg dann auf die Addition der Zahlen bis 100 und andere Aufgaben dieser Art angewendet.

Weiterführende Aufgaben:

- Bei welchen Reihen entstehen gerade/ungerade Zahlen als Summe?
- Bei einer ungeraden Anzahl von Zahlen, die addiert werden sollen, bleibt in der Mitte eine Zahl übrig, die keinen Partner bekommt. Wie kann man diese Zahl finden? Ist diese Zahl gerade oder ungerade?
- ...

LÖSUNGSHINWEISE

Die Lösungsmethode soll hier am Beispiel der Addition der ersten sechs Zahlen dargestellt werden.

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = ?

Die Zahlen werden so zusammengefasst, dass sich jeweils die gleiche Summe ergibt. Dazu wird die erste mit der letzten Zahl addiert, die zweite Zahl mit der vorletzten usw.

7

7

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = ?

7

Die Summe der ersten sechs Zahlen lässt sich also als 7 + 7 + 7 zusammenfassen oder schneller als $3 \cdot 7$.
Die Summer beträgt also hier 21.

Auf die Summe der ersten 100 Zahlen übertragen bedeutet dies:

101

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = ?

101

Die Summe der ersten und der letzten Zahl beträgt 101, ebenso die Summe der zweiten und der vorletzten Zahl usw. Da es 100 Zahlen sind, die summiert werden sollen, gibt es die Summe 101 genau 50-mal.
$101 \cdot 50 = 5050$
Die gesuchte Summe in der Aufgabe des Lehrers ist also 5050.

Für eine ungerade Anzahl gilt nach dieser Methode:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = ?

Es werden jeweils wiederum die erste und die letzte Zahl addiert, die zweite und die vorletzte usw. Jedoch bleibt die Zahl in der Mitte der ersten und der letzten Zahl übrig, diese muss am Ende addiert werden.
$8 \cdot 3 + 4 = 28$

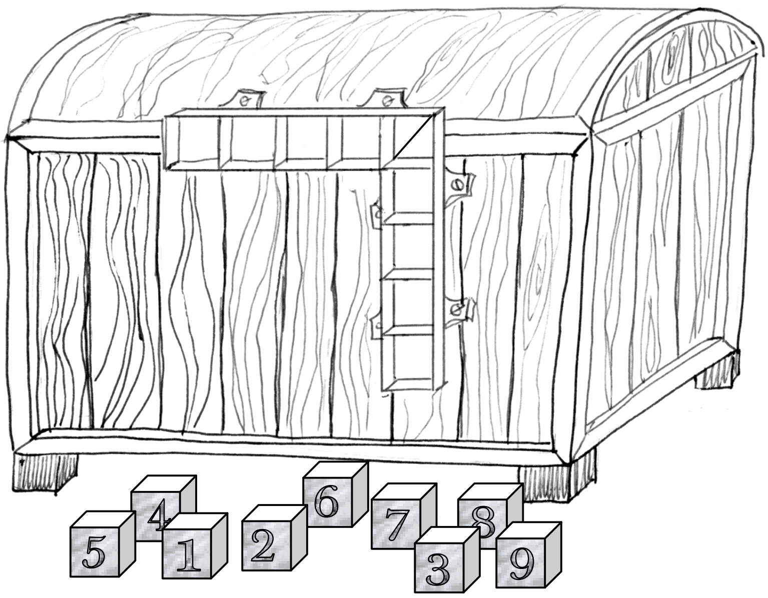
ERGÄNZENDE AUFGABEN

1. Berechne die Summe der ersten zehn Zahlen! 1+ 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = ?	2. Berechne die Summe der ersten 15 Zahlen! 1+ 2 + 3 + 4 + ... + 12 + 13 + 14 + 15 = ?
3. Berechne die Summe der ersten 20 Zahlen! 1+ 2 + 3 + 4 + ... + 17 + 18 + 19 + 20 = ?	4. Berechne die Summe der ersten 25 Zahlen! 1+ 2 + 3 + 4 + ... + 22 + 23 + 24 + 25 = ?

LÖSUNGEN

1.	$5 \cdot 11 = 55$	2.	$7 \cdot 16 + 8 = 120$
3.	$10 \cdot 21 = 210$	4.	$12 \cdot 26 + 13 = 325$

2.6 Die Zahlentruhe



Die Truhe ist mit einem Zahlenschloss versehen.
Öffne das Schloss, indem du die Zahlenwürfel richtig einsetzt!
Dazu müssen die Summe der waagerechten Reihe
und die Summe der senkrechten Reihe gleich groß sein.

a) Wie hoch ist deine Summe?
b) Wie hast du herausgefunden, wie du die Zahlen verteilen musst?
c) Gibt es noch andere Lösungen?

Aufgabe nach Fielkner, D: Extending Mathematical Ability Through Whole Class Teaching, London, Hodder & Stoughton, 1997.

ZUR AUFGABE
Diese Aufgabe ist leicht zu lösen, wenn die betreffenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen bekannt sind und genutzt werden.

METHODISCHE HINWEISE:
Es bietet sich an, die Aufgabenstellung gemeinsam durchzusprechen, weil viele Kinder sich noch einmal versichern wollen, ob sie die Aufgabe richtig verstanden haben. Der Begriff „Summe“ könnte einigen Kindern unbekannt sein.
Als Material sollten leere Muster des Winkels („Schloss“) und ggf. Zahlenplättchen zur Verfügung stehen. Es ist natürlich ebenso möglich, den Winkel mit den Kinder gemeinsam zu zeichnen. Die Anzahl der leeren Winkel ist von der genauen Aufgabenstellung abhängig. Es sollten mehr leere Winkel als mögliche Lösungen sein. Eine Kopiervorlage ist im Anschluss an die Lösungshinweise abgedruckt.

Vor oder während der Erarbeitung der Aufgabe wird die Frage aufkommen, was als „andere“ Lösung gilt. Es werden hier nur solche Lösungen als verschieden betrachtet, die eine völlig neue Anordnung der Zahlen auf den beiden Schenkeln des Winkels darstellen. Vertauschungen der Schenkel untereinander sowie Vertauschungen der Zahlen auf einem Schenkel bei gleicher Zahl in der Ecke werden hier als gleiche Lösung betrachtet. Werden diese in der Arbeit mit den Kindern als verschiedene Lösung zugelassen, ergeben sich je nach Absprache weitere Lösungen.

Viele Kinder werden zuerst einmal versuchen, die Aufgabe über das Probieren zu lösen. Einige Kinder entdecken sicher aber auch Möglichkeiten, sich die Lösung strategisch zu erarbeiten. Zu diesen Strategien gehören häufig:

- Die Zahlen erst einmal aufzuteilen und dann auszugleichen.
- Die Gesamtsumme aller Zahlen zu berechnen und diese dann abzüglich einer Zahl für das Eckfeld zu halbieren.

Die Aufgabe kann im Schwierigkeitsgrad erhöht werden, indem die Schenkel verlängert werden. Ebenso lassen sich die einzusetzenden Zahlen vergrößern, indem sie addiert oder multipliziert werden.

Es gibt Aufgaben, die durch ähnliches Vorgehen gelöst werden können. Dazu gehören u.a. die „Zauberbuchstaben". Beispiele befinden sich im Anschluss an diese Aufgabe („Die Zahlentruhe ergänzende Aufgaben")

LÖSUNGSHINWEISE

Eine rasch zum Ergebnis führende Strategie ist, die Gesamtsumme aller neun Zahlen zu berechnen und danach die Eckzahl festzulegen.

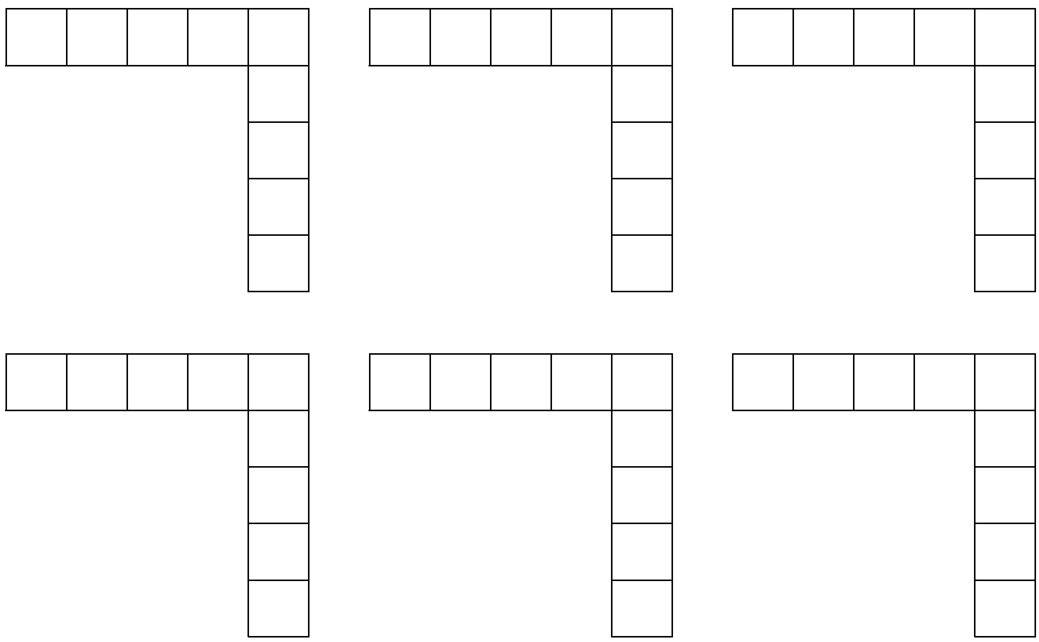
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$[4]

45 ist eine ungerade Zahl. Wenn in das Eckfeld eine gerade Zahl geschrieben wird, bleibt als auf die zwei Schenkel zu verteilende Summe eine ungerade Zahl. Dieses gleichmäßig zu verteilen ist nicht möglich. Deshalb muss in das Eckfeld eine ungerade Zahl geschrieben werden. Die Summe abzüglich der Eckzahl wird halbiert und die Zahlen entsprechend auf die Schenkel verteilt.

Beispiel:
In das Eckfeld wird die 9 geschrieben. $45 - 9 = 36$
Es bleiben also für die beiden Schenkel 36, jeweils 18.
Wie können die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 auf zweimal 18 verteilt werden?
Es ist zum Beispiel möglich 1 und 8, 2 und 7 für den waagerechten Schenkel sowie 3 und 6, 4 und 5 für den senkrechten Schenkel zu nehmen.

1	8	2	7	9
				3
				6
				4
				5

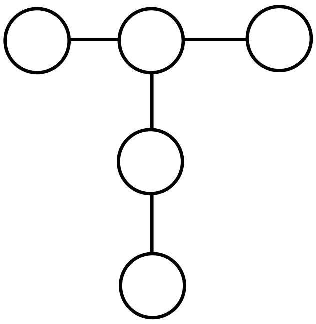
Für die anderen ungeraden Zahlen (1,3,5,7) lassen sich mit dem gleichem Vorgehen ebenso Lösungen finden. So sind für diese Aufgabe fünf verschiedene Lösungen möglich.



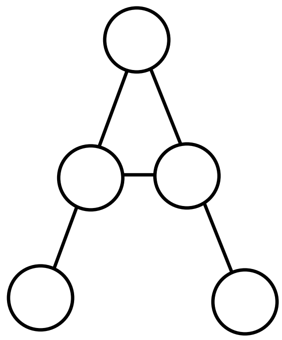
4 An dieser Stelle ist eine Verzahnung mit der Aufgabe „König der Mathematik" möglich. Diese Aufgabe kann als Ausgangspunkt oder aber als Wiederholung für die Aufgabe „König der Mathematik" genutzt werden.

Zauberbuchstaben 1

Trage die Zahlen von 1 bis 5 so ein, dass auf jeder Strecke die gleiche Summe entsteht! Jede Zahl darf nur einmal eingetragen werden!
Die Zauberzahl ist die Summe, die auf jeder Strecke gleich ist.



Zauberzahl: ____



Zauberzahl: ____

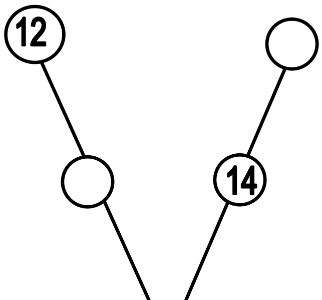
nach: Käpnick, F.: Knobeln und Rechnen mit Zauberbuchstaben, in: Grundschulunterricht, 41 (1994) 5

LÖSUNGSHINWEISE

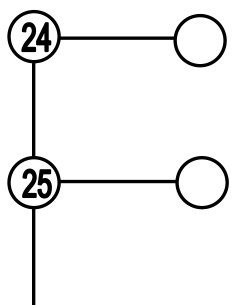
Diese Aufgaben lassen sich entsprechend der Aufgabe „Die Zahlentruhe" lösen.
Die Summe der Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 beträgt 15. Da dieses eine ungerade Zahl ist, kann in den mittleren Kreis auf der waagerechten Strecke keine gerade Zahl stehen. Ebenso muss in die Spitze des großen A eine ungerade Zahl eingetragen werden. Hierbei muss die Anordnung der Zahlen auf den beiden schrägen Strecken noch so gewählt werden, dass sich eine gleiche Summe für die waagerechte Strecke ergibt. Verschiedene Lösungen sind möglich.

Zauberbuchstaben 2

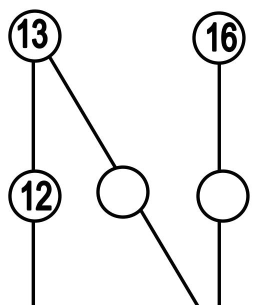
Ergänze so, dass Zauberbuchstaben entstehen!



Zauberzahl: 33



Zauberzahl: __



Zauberzahl: 42

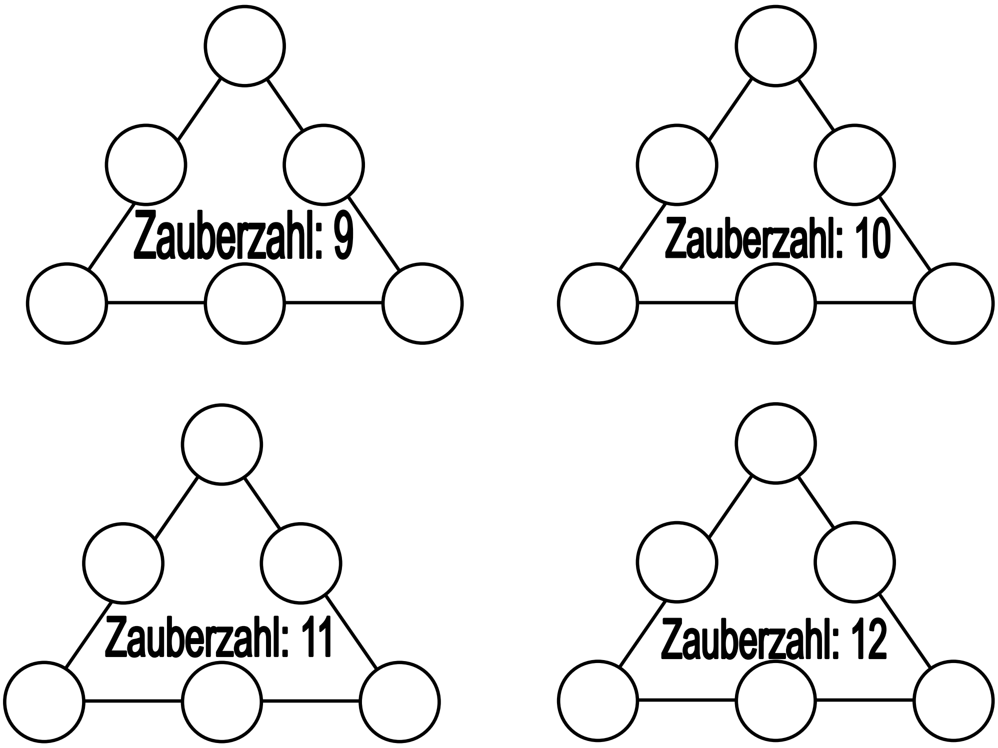
nach: Käpnick, F.: Knobeln und Rechnen mit Zauberbuchstaben, in: Grundschulunterricht, 41 (1994) 5

LÖSUNGSHINWEISE

Werden die Aufgaben zu den Zauberbuchstaben so gestellt, wie oben abgebildet, kann mit ihnen das strategische Rechnen geübt werden. Sie sind in der Regel eindeutig zu lösen, d.h. es gibt genau eine richtige Lösung.

Zauberfiguren

Dir stehen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zur Verfügung.
Trage sie so ein, dass in jeder Reihe o-o-o die angegebene Zauberzahl erreicht wird!



nach: Radatz, Rickmeyer: Aufgaben zur Differenzierung, Schroedel.

METHODISCHE HINWEISE

Diese Aufgaben haben einen höheren Schwierigkeitsgrad, als die vorangegangenen. Die Kinder können diese Aufgaben mit Zahlenkärtchen legen oder auf dem Arbeitsblatt die Zahlen direkt eintragen. Viele Kinder probieren die Lösung erst einmal aus, indem sie die Zahlen verteilen und dann die Summen berechnen. Anschließend gleichen manche Kinder aus, vertauschen also Zahlen miteinander um die Lösung zu erreichen. Es gibt auch die Möglichkeit, sich zu überlegen, mit welchen Kombinationen von jeweils drei Zahlen die Zauberzahl erreicht werden kann und dann diese Gleichungen entsprechend einzutragen. Dieses Vorgehen kann den Kindern als Tipp gegeben werden, falls sie es nicht selbst entwickeln.

Weiterführende Aufgaben:

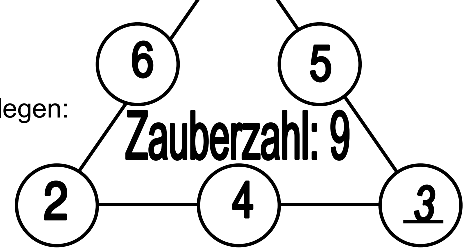
- Können noch andere Zauberzahlen mit den Zahlen von 1 bis 6 erreicht werden?
- Betrachte für die verschiedenen Zauberzahlen jeweils die Summer der Eckzahlen. Was gibt es zu entdecken?

LÖSUNGSHINWEISE

Beispiel: Zauberzahl 9
Welche Gleichungen mit drei Summanden gibt es mit der Summe 9?

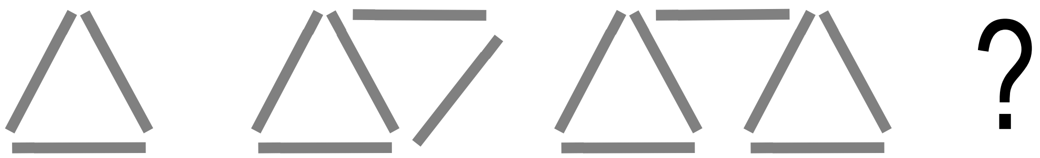
1 + **2** + **6** = 9 **1** + <u>3</u> + 5 = 9 **2** + <u>3</u> + 4 = 9

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich nun die Eckpunkte festlegen: die doppelt vorkommenden Zahlen bilden die Eckpunkte.



2.7 Dreiecke aus Streichhölzern

1 Dreieck | 2 Dreiecke | 3 Dreiecke | 4 Dreiecke



3 Streichhölzer | 5 Streichhölzer | 7 Streichhölzer | Wie viele Streichhölzer?

Nimm dir eine Schachtel Streichhölzer!

Für ein Dreieck benötigst du drei Streichhölzer, für zwei Dreiecke benötigst du fünf Streichhölzer, für drei Dreiecke sieben Streichhölzer und so weiter.

1. Lege die Dreiecke wie auf dem Bild! Wie geht es weiter?
2. Wie viele Streichhölzer benötigst du für vier Dreiecke, für fünf Dreiecke und für sechs Dreiecke?
3. Und wie viele Streichhölzer benötigst du für zehn Dreiecke? Und für elf Dreiecke?
4. Bis jetzt war es leicht. Du konntest es gut legen.
   Wie viele Streichhölzer würdest du aber für 39 Dreiecke benötigen?
   Überlege es dir auch für 85 Dreiecke und 100 Dreiecke!
   Finde die Regel!

nach: Dahl, K. / Nordqvist, S.: Zahlen, Spiralen und magische Quadrate, Verlag Friedrich Oetinger, Hamburg.

ZUR AUFGABE

Bei dieser Aufgabe finden die Kinder rasch die Lösungen für die ersten Teilaufgaben und arbeiten daher gut motiviert weiter. Das besondere dieser Aufgabe liegt darin, dass die Kinder die Lösungsformel für alle Anzahlen von Dreiecken recht leicht finden. Die Lösungsformel können vermutlich viele Kinder zwar nicht mathematisch aufschreiben, es gelingt ihnen aber, sie sprachlich korrekt zu formulieren. Da die Lösungsformel recht einfach ist, können in der Regel alle Kinder anschließend die Berechnungen für alle Anzahlen von Dreiecken durchführen.

Die Aufgabe bietet eine gute Möglichkeit, die Kinder an das Problemlösen mittels Tabellen heranzuführen.

METHODISCHE HINWEISE:

Statt der Streichhölzer können Stäbchen jeder Art verwendet werden.

Die Aufgabe kann mittels einer Kopiervorlage für die Hand des Schülers oder im Kreisgespräch gestellt werden. Es bietet sich an, die weiterführende Aufgabe Nummer 4 erst ein wenig später einzugeben. Dieses kann durch die Lehrkraft oder durch eine verdeckt an der Tafel angebrachte Aufgabenkarte erfolgen.

Die Kinder werden versuchen, sich die Lösung auf verschiedenen Wegen zu erschließen. Denkbar wäre dies durch Legen, durch Zeichnen, durch Überlegen.

Einige Kinder formulieren schon bald die Lösungsformel. Kindern, denen dieses nicht von allein gelingt, kann eine Tabelle als Hilfestellung gegeben werden.

Anzahl der Dreiecke	Anzahl der Streichhölzer	
1	3	
2	5	
3	7	
...	...	

Eine Zusammenfassung und Erprobung der gefundenen Formel z. B. im Sitzkreis ist sinnvoll. Kinder, die die Lösungsformel nicht gefunden haben, verstehen sie beim Erklären durch die anderen Kinder leicht und sind dann oft sehr motiviert, sie selbst auszuprobieren.

LÖSUNGSHINWEISE

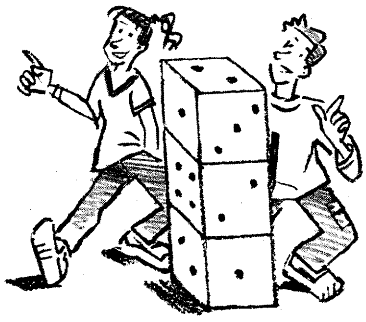
Wenn man die Tabelle weiterführt, erhält man folgende Werte:

Anzahl der Dreiecke	Anzahl der Streichhölzer	
1	3	
2	5	
3	7	
4	9	
5	11	
6	13	
...	...	

Die Kinder werden schnell erkennen, dass sich die Anzahl der Streichhölzer jeweils um 2 erhöht. Für die Berechnung der Hölzeranzahlen für große Dreieckanzahlen führt dieses sukzessive Vorgehen jedoch schwer zum Ziel.
Hier können die Kindern durch Zeigen und Erklärungen aufgefordert werden, Zusammenhänge zwischen den Zahlen in jeder Reihe zu suchen und sich nicht auf die Spalten zu konzentrieren. Oft gelingt es ihnen dann zu formulieren, dass die Anzahl der Streichhölzer das Doppelte plus eins der Anzahl der Dreiecke ist. Dieses kann dann auch für Kinder verständlich verschriftlicht werden.

Anzahl der Dreiecke	Anzahl der Streichhölzer	Zusammenhang
1	3	$2 + 1$
2	5	$4 + 1 = 2 \cdot 2 + 1$
3	7	$6 + 1 = 3 \cdot 2 + 1$
4	9	$8 + 1 = 4 \cdot 2 + 1$
5	11	$10 + 1 = 5 \cdot 2 + 1$
6	13	...

2.8 Knobeleien mit Würfeln



Lisa und Paul stellen drei Würfel so übereinander, dass ein Dreierturm entsteht. Anschließend zählen sie alle sichtbaren Augenzahlen zusammen.
Sie erhalten die Summe 44.

1. Wie könnten die Kinder die drei Spielwürfel übereinander gestellt haben?
2. Welche kleinstmögliche Summe kann man bei einem Dreierturm erreichen?
3. Welche größtmögliche Summe kann man bei einem Dreierturm erreichen?
4. Finde eigene Aufgaben!

aus: Käpnick, F.: Mathe für kleine Asse, Volk und Wissen 2001

ZUR AUFGABE

Diese Aufgabe ist ein Beispiel für die vielfältigen Aufgaben mit und um Würfel. Hier geht es darum, mit den Augenzahlen eines Spielwürfels geschickt zu rechnen.
In der Würfelkartei in dieser Handreichung sind ergänzende und weiterführende Aufgaben zusammengefasst.

METHODISCHE HINWEISE:

Diese Aufgabe motiviert die Kinder sehr, insbesondere, wenn Spielwürfel zur Verfügung stehen, mit denen die Kinder diese Aufgabe handelnd lösen können.
Nicht alle Kinder wissen, dass die Summe der gegenüberliegenden Würfelseiten immer sieben beträgt. Ebenso ist es für die Kinder nicht immer leicht, dieses Wissen anzuwenden. Wenn die Kinder noch nicht viele Erfahrungen mit dem Rechnen mit Würfelaugen gesammelt haben, ist es sinnvoll, die Summe der gegenüberliegenden Seiten zu thematisieren. Eine Möglichkeit hierzu bietet die Karteikarte „Würfel 1“ aus der Würfelkartei.
Bei dieser Aufgabe wird angenommen, dass die untere Augenzahl des unteren Würfels nicht zu sehen ist. Dieses muss ggf. geklärt werden.

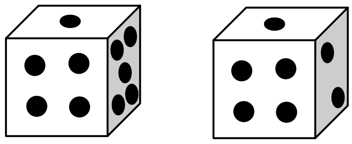
Die Aufgabe kann gut in der Form eines „mathematischen Zaubertricks“ eingeführt werden. Der Spielleiter („Zauberer“) braucht nur einen kurzen Blick, um die Gesamtsumme der sichtbaren Zahlen nennen zu können. Schaffen die Zuschauer dies ebenso schnell?

Aufgabe a) regt zum Nachbauen des Turmes an. Wenn die Kinder ihre gefundenen Möglichkeiten vergleichen, können sie Lösungsstrategien entdecken oder aber auch den Aufbau des Spielwürfels erfahren. Die Aufgaben b) und c) sind für die Kinder leicht zu lösen, wenn sie erkannt haben, dass die Gesamtsumme des Turmes nur durch die obere Fläche des oberen Würfels bestimmt wird.

In Aufgabe d) sind die Kinder aufgefordert, selbst ähnliche Aufgaben zu entwickeln. Möglich wären:
- Der Turm wird aus anderen Anzahlen von Würfeln gebaut, etwa ein Viererturm.
- Die untere Fläche des unteren Würfels ist zu sehen, z. B. durch eine Glasplatte.
- Gesucht sind alle möglichen Augenzahlen für den Dreierturm.

Anregungen hierzu können auch aus der Würfelkartei dieser Handreichung entnommen werden.

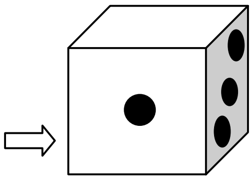
Wenn die Kinder Würfel zum Lösen der Aufgaben benutzen, kann es zu Verwirrungen kommen, weil die Augen auf den Würfeln nicht immer identisch angeordnet sind. Die Bedingung der Summe sieben der gegenüberliegenden Seiten lässt verschiedenen Anordnungen der Augen zu („linke“ und „rechte“ Würfel). Wenn dieses nicht auch zum Inhalt bei der Bearbeitung der Aufgabe gehören soll, ist es hilfreich, nur gleiche Würfel zu verwenden.

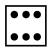


LÖSUNGSHINWEISE

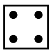
Grundlage zur schnellen Lösung dieser Aufgabe ist die Kenntnis, dass die Summe der gegenüberliegenden Würfelseiten sieben beträgt.
Daraus folgt, dass die Summe der sichtbaren Augen der beiden unteren Würfel jeweils 14 ist.

Für die beiden unteren Würfel gilt:



hinten:  Die Flächen oben und unten sind im Turm nicht sichtbar, werden also nicht mitgezählt.

links:



vorn und hinten: 7
links und rechts: 7

Summe der sichtbaren Augen der beiden unteren Würfel: $14 \cdot 2 = 28$

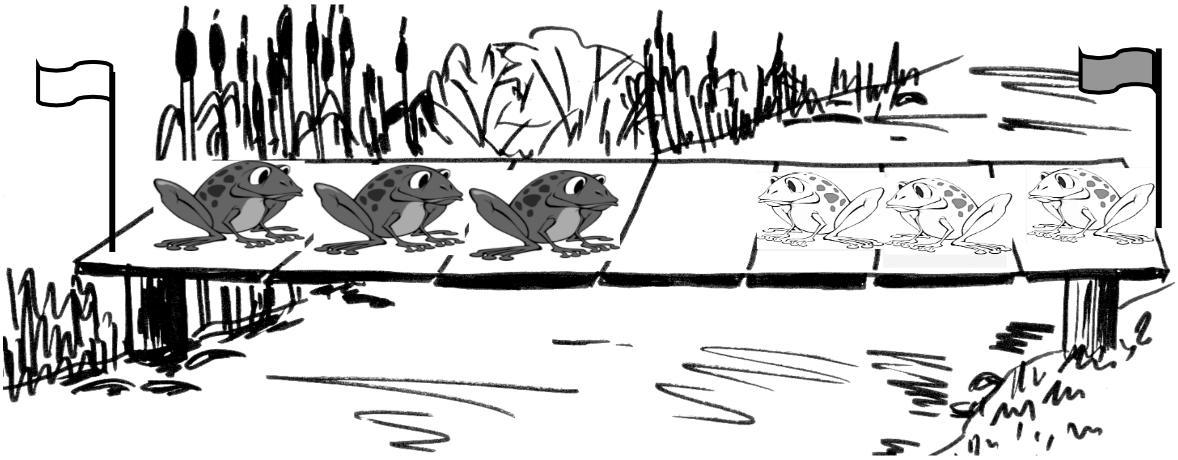
Die Gesamtsumme der sichtbaren Augen der drei Würfel wird also nur durch den oberen Würfel bestimmt, und dabei auch nur durch die obere Fläche.
Der obere Würfel hat ebenso eine Summe der Flächen vorn und hinten, links und rechts von 14. Dazu kommt jeweils die obere Seite, im Bild der Aufgabenstellung die Zwei. Daraus folgt: Die Gesamtsumme der sichtbaren Augenzahlen ist hier: $3 \cdot 14 + 2 = 44$.

zu Aufgabe a)
Da die Gesamtsumme der sichtbaren Augenzahlen 44 beträgt, muss oben auf dem Würfelturm eine Zwei liegen. Der obere Würfel kann also auf vier verschiedene Weisen auf den Turm gestellt werden:
die Zwei ist immer oben, jede der seitlichen Flächen kann vorn sein.
Die beiden unteren Würfel können in jede mögliche Lage gebracht werden.

zu Aufgabe b)
Für einen Dreierturm gilt: die Summe der Flächen an den Seiten der Würfel beträgt: $3 \cdot 14 = 42$.
Die kleinstmögliche Gesamtsumme der sichtbaren Augenzahlen kann erreicht werden, indem der obere Würfel so gelegt wird, dass oben die Eins liegt.
Gesamtsumme. $42 + 1 = 43$

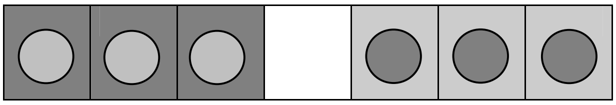
zu Aufgabe c)
Analog zu Aufgabe b) folgt: Der obere Würfel wird so gedreht, dass oben die Sechs liegt.
Gesamtsumme: $3 \cdot 14 + 6 = 48$

2.9 Froschhüpfen



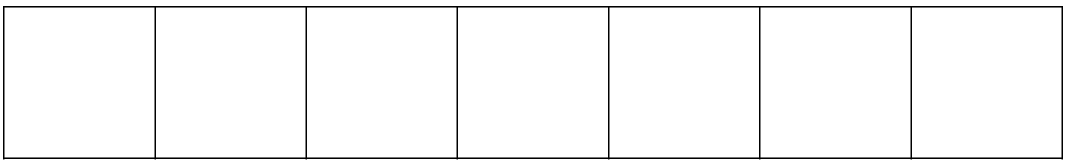
An einem Bach treffen sich auf der Brücke sechs Frösche.
Die roten Frösche sitzen zu Beginn auf der blauen Seite und umgekehrt.
Am Ende sollen die roten Frösche auf der roten Seite sitzen
und die blauen Frösche auf der blauen Seite.
Um dahin zu gelangen, dürfen die Frösche auf ein freies Nachbarfeld hüpfen
oder über einen Nachbarfrosch springen.
Du benötigst dazu ein Spielfeld, drei rote Plättchen und drei blaue Plättchen.

Start:



Ziel:

Spielfeld:



1. Spiele das Spiel!
2. Wenn du eine Lösung gefunden hast, versuche es noch einmal und merke dir dabei, wie viele Spielzüge du benötigt hast!
3. Schaffst du es auch mit weniger Spielzügen?
4. Wie viele Spielzüge werden mindestens benötigt? Warum?

Tipp: Wenn es dir schwer fällt, dir die Spielzüge zu merken, versuche sie aufzuschreiben oder aufzuzeichnen!

aus: Müller, G./ Wittmann, E.: Denkschule, Klett-Verlag.

ZUR AUFGABE

Die Kinder haben große Freude am Lösen dieser Aufgabe. Den meisten Kindern fällt es leicht, eine Lösung zu finden.
Es gibt zu dieser Aufgabe eine Reihe von ähnlichen Aufgaben, die vor oder nach dieser Aufgabe gelöst werden können. Anregungen dazu sind unten und auf den nächsten Seiten angegeben.

METHODISCHE HINWEISE:

Material: Spielplan und je drei Plättchen in zwei Farben o.ä.

Die Aufgabenstellung kann durch eine bildliche Darstellung und/oder eine Geschichte eingegeben werden. Dieses fördert die Motivation der Kinder, sich mit der Aufgabe auseinander zu setzen sehr.

Den Kindern bereitet es in der Regel keine Schwierigkeiten, eine Lösung zu finden. Schwerer ist es für sie, diese Lösung im Anschluss noch einmal durchzuspielen, sich also die einzelnen Schritte zu merken. Besonders wenn sie versuchen, möglichst wenig Spielzüge zu benötigen, ist es für sie sehr schwer, einen ungünstigen vorhergegangenen Zug zurückzunehmen. Dazu wäre es nötig, sich an die letzten Züge genau erinnern zu können. So kommen die Kinder leicht zu der Einsicht, dass es hier sehr vorteilhaft ist, sich die Züge aufzuschreiben. Die Kinder entwickeln dazu in der Regel verschiedene Notationen (Pfeile zur Darstellung der Bewegungen, Nummerierungen der Plättchen, Notation der Bewegungen durch Zahlen u.a.m.) Hier soll in den Lösungshinweisen eine mögliche Notationsform der Lösung angegeben werden, die auch nach mehreren Spielzügen noch übersichtlich und gut nachvollziehbar ist.

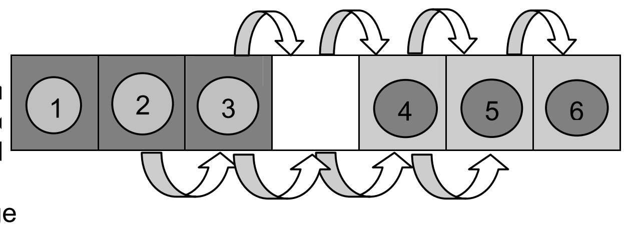
Fällt es den Kindern schwer, eine Lösung für die Aufgabe zu finden oder zu notieren, kann mit einem solch kleinen Spielfeld begonnen werden.

Ein für die Kinder wichtiger Lösungshinweis ist, dass die Frösche, wenn sie in möglichst wenig Spielzügen die Seiten wechseln sollen, nicht rückwärts gehen dürfen. Dieser Tipp kann den Kindern gegeben werden, wenn sie diesen Zusammenhang nicht selbst erkennen.

Je weniger Absprachen und Erklärungen vorab gegeben werden, desto mehr kommt man in die Diskussion über die Regeln und deren Auswirkungen auf den Spielverlauf.

LÖSUNGSHINWEISE

Zu Aufgabe 4:
Jeder der „Frösche“ muss vier Felder weiter gesch
ben werden, damit die Zielaufstellung erreicht werd
kann. Hier sind als Beispiele die Bewegungen d
Spielsteine Nr. 2 und Nr. 3 aufgezeichnet.
6 Steine x 4 Felder = 24 Bewegungen oder Spielzüge



Es muss noch bedacht werden, dass die Spielsteine der anderen Farbe übersprungen werden. Dabei rücken die Spielsteine nicht nur ein Feld, sondern zwei Felder weiter. Jeder Spielstein der einen Farbe überspringt die drei Steine der anderen Farbe, also gibt es neun Sprünge. Dadurch wird neunmal das Vorwärtsschieben eingespart.

$$24 - 9 = 15$$

Für eine optimale Lösung mit möglichst wenigen Spielzügen werden demnach 15 Spielbewegungen benötigt.

Auf der nächsten Seite wird eine mögliche Lösung dargestellt. Hierbei sind jeweils die Spielsteine nach dem Spielzug eingezeichnet. Es ist möglich, noch Zeilen zu ergänzen, in denen die beabsichtigte Bewegung mit eingetragen wird. Dieses erleichtert das Nachspielen, verlängert aber die Lösungsangabe.

Nebenstehend ist eine mögliche Lösung notiert.
Dabei wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die Felder in der ersten Reihe gefärbt.

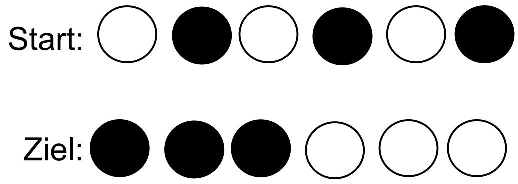
Ausgangslage	1	2	3		4	5	6
1	1	2		3	4	5	6
2	1	2	4	3		5	6
3	1	2	4	3	5		6
4	1	2	4		5	3	6
5	1		4	2	5	3	6
6		1	4	2	5	3	6
7	4	1		2	5	3	6
8	4	1	5	2		3	6
9	4	1	5	2	6	3	
10	4	1	5	2	6		3
11	4	1	5		6	2	3
12	4		5	1	6	2	3
13	4	5		1	6	2	3
14	4	5	6	1		2	3
15	4	5	6		1	2	3

Unten: die Leertabelle kann von den Kindern entsprechend der Farben der von ihnen verwendeten Plättchen gefärbt und zum Notieren der einzelnen Schritte genutzt werden (vergrößert kopieren).

19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

Plättchen sortieren

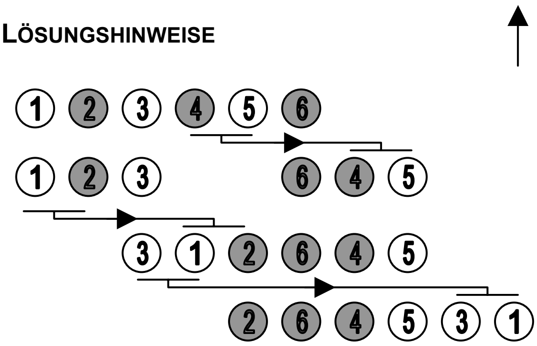
Lege auf den Tisch 6 Plättchen in eine Reihe und zwar abwechselnd ein weißes und ein schwarzes Plättchen. Verschiebe die Plättchen nun so, dass alle weißen Plättchen rechts und alle schwarzen Plättchen links daneben liegen.



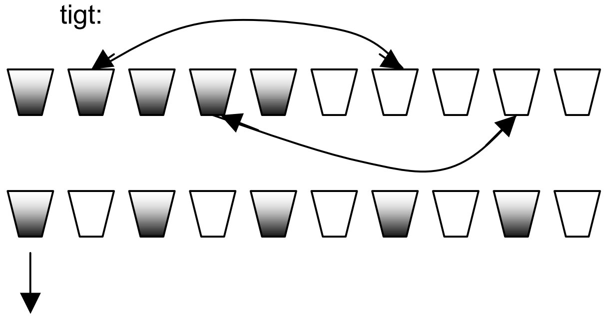
Dabei sollst du immer gleichzeitig zwei nebeneinander liegende Plättchen verschieben, ohne ihre Reihenfolge zu ändern.

aus: F. Käpnick, Mathe für kleine Asse, Verlag Volk und Wissen.

LÖSUNGSHINWEISE



Es werden zwei Züge für die erste Aufgabe benötigt:



Jonnys Gläser

Idee aus: M. Gardner: AHA! oder das wahre Verständnis der Mathematik, Hugendubel Verlag.

METHODISCHE HINWEISE

Diese Aufgabe ergänzt die beiden vorangestellten. Auf den ersten Blick könnte die Lösung so ähnlich zu finden sein. Um die Lösung des Bärenmädchens zu finden, muss man allerdings beachten, dass der Inhalt der Gläser umgefüllt werden kann.

LÖSUNGSHINWEISE

Die Lösung für die erste Aufgabe ist über dem Bild notiert. Die Aufgabe des Bärenmädchens ist zu lösen, indem man den Becher Nummer zwei nimmt und den Inhalt in den Becher Nummer sieben gießt. Entsprechend wird mit den Bechern vier und neun verfahren.

2.10 Die drei Feen

____________ ____________ ____________

Wie heißt die Fee mit dem gelben Kleid?

1. Der Hut der Fee Morgentau ist rosa.
2. Annabella trägt eine orange Schürze und ein braunes Kleid.
3. Der Feenstab der Fee Goldhaar ist nicht aus Gold.
4. Die Fee links außen ist mit einer roten Schürze bekleidet.
5. Eine Fee trägt ein grünes Kleid mit einer hellgrünen Schürze.
6. Die Fee mit dem blauen Hut hat einen Feenstab aus Silber.
7. Zwei Feenstäbe sind aus Gold.
8. Ein Feenhut ist gelb.
9. Die Fee Annabella steht nicht neben der Fee Morgentau.

Antwort: Die Fee mit dem gelben Kleid heißt:________________

ZUR AUFGABE

Logicals sind ein beliebter Bestandteil der Arbeit in den Mathematikzirkeln. Es sind in mehreren Verlagen Veröffentlichungen mit Logicals in verschiedenen Schwierigkeitsstufen erschienen. (vgl. Literaturverzeichnis)

Hier soll nur ein selbstentwickeltes Logical als Beispiel vorgestellt werden, das von den Kindern bereits etwas Übung beim Lösen solcher Aufgaben voraussetzt.

METHODISCHE HINWEISE:

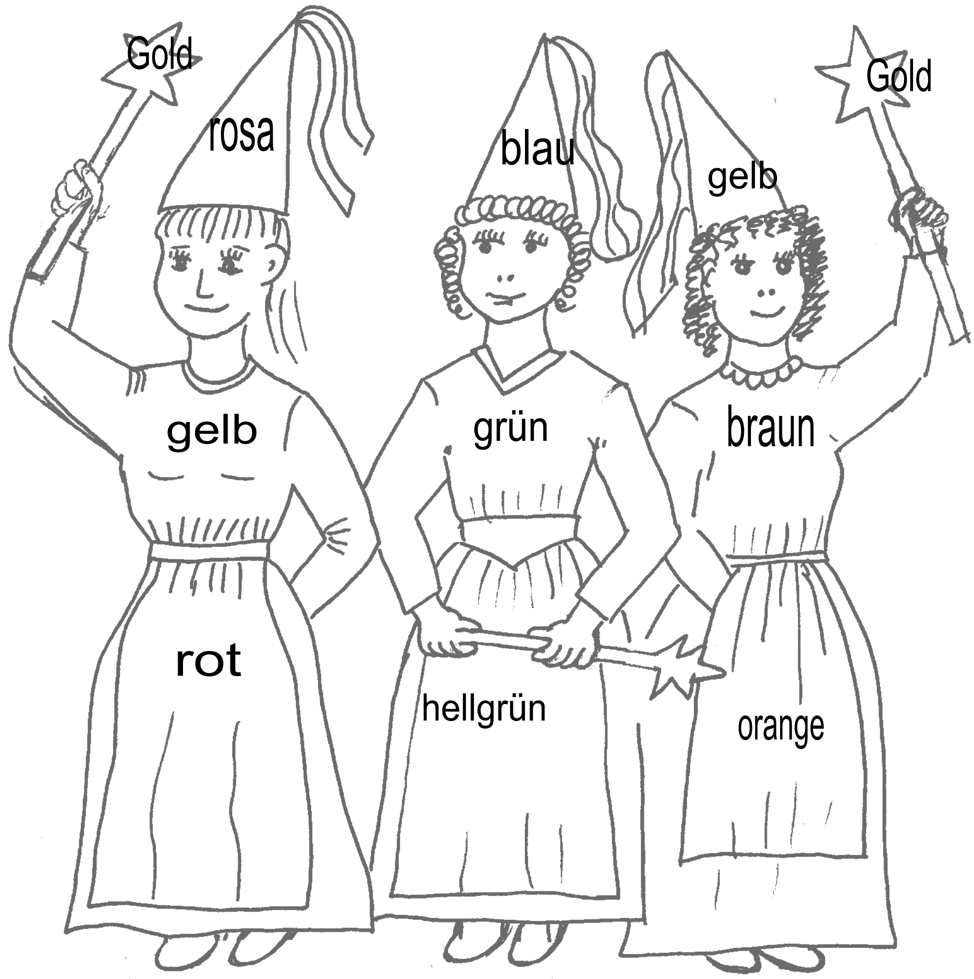
Zum Einstieg sollten mit den Kindern Logicals bearbeitet werden, die recht einfach zu lösen sind. Dabei können Tipps zum Lösen solcher Aufgaben erarbeitet und zusammengetragen werden, die dann bei schwierigeren Logicals angewendet werden.

Solche Tipps sind:

- Lies dir alle Angaben durch.
- Beginne mit dem Satz, der eine Aussage enthält, die du sicher eintragen kannst.
- Schreibe oder male dir alle Angaben auf, die du gefunden hast und die du genau zuordnen kannst.
- Streiche die Sätze durch, in denen du keine neuen Angaben mehr finden kannst.
- ...

LÖSUNGSHINWEISE

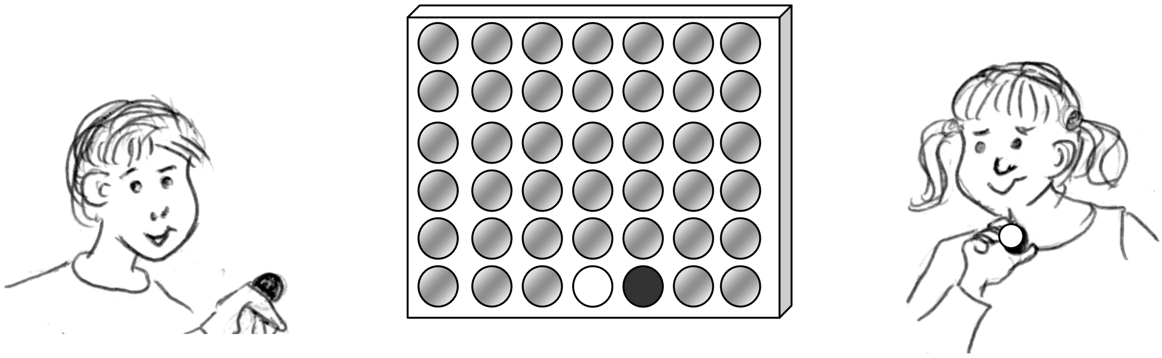
Hier kann man in Satz 4 beginnen. Danach bieten sich die Sätze 9 und 2 im Zusammenhang an. Stellt man alle Angaben zusammen ergibt sich:



Morgentau Goldhaar Annabella

Die Fee mit dem gelben Kleid heißt: Morgentau.

2.11 Vier gewinnt



Zur Zeit spielt Lisa oft mit Fabian das Spiel “Vier gewinnt”, das sie zum Geburtstag geschenkt bekam. Bei diesem Partnerspiel steckt jeder Spieler abwechselnd einen Stein seiner Farbe in ein 7x6-Rechteckfeld.
Wem es zuerst gelingt, vier Steine seiner Farbe in einer Reihe zu platzieren, hat gewonnen. Dabei können die vier Steine in einer Reihe nebeneinander, übereinander oder in einer schrägen Linie angeordnet sein.
Den Kindern macht das Spiel viel Spaß. Nachdem Lisa und Fabian wieder einmal einige Partien gespielt haben, fragt Lisa: „Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es überhaupt vier Spielsteine in eine Reihe zu setzen, um das Spiel also zu gewinnen?“. „Keine Ahnung.“, antwortet Fabian verdutzt. Dann versucht er aber gemeinsam mit Lisa die Frage zu beantworten. Schaffst du es auch?

nach: www.vwv.de, Internetseite: Monatsknobelaufgaben, Februar 2002.

Das Spiel „Vier gewinnt“ kennen die meisten Kinder. Es ist recht schnell zu spielen und seine wenigen Regeln machen es zu einem der beliebtesten Spiele.
Es eignet sich sehr gut dazu, es projektartig in den Mittelpunkt einiger Zirkelveranstaltungen zu stellen. Zum einen können Aufgaben zum Spiel selbst gelöst und entwickelt werden, zum anderen ist es für die Kinder sehr motivierend, eine „Vier gewinnt“-Meisterschaft zu organisieren und durchzuführen.

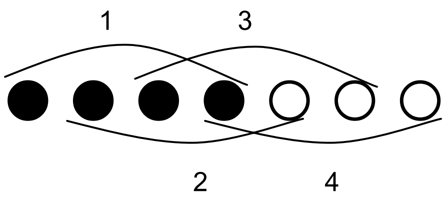
ZUR AUFGABE
Der große Vorteil dieser Aufgabe liegt darin, dass sie durch die einfachen Regeln rasch zu verstehen ist. Diese Aufgabe kann durch systematisches Überlegen gelöst werden. Die Kinder beginnen in der Regel schnell mit dem Auszählen der einzelnen Möglichkeiten, vier Steine in eine Reihe zu setzen. Dabei können sie an dieser Aufgabe gut üben strategisch vorzugehen, also alle Möglichkeiten zu beachten und übersichtlich zu notieren.

METHODISCHE HINWEISE:
Die Kinder benötigen Papier und ggf. entsprechende Punktefelder. Sie sollten angehalten werden, ihre Überlegungen so übersichtlich aufzuschreiben, dass auch für andere eindeutig zu erkennen ist, dass alle Möglichkeiten gefunden wurden.
Werden die einzelnen Darstellungen in der Gruppe besprochen und verglichen, erhalten die Kinder dabei viele Anregungen über mögliche Darstellungsformen.
Als Tipp kann gegeben werden, dass die Kinder erst die Möglichkeiten für die Viereranordnung in einer waagerechten Reihe herausfinden sollen, um dann auf alle waagerechten Reihen zu schließen. Entsprechend kann für die senkrechten Reihen vorgegangen werden.
Bei den diagonalen Reihen wird zunächst die Anzahl der Steine betrachtet, da mindestens vier Steine vorhanden sein müssen.

Als ergänzende Aufgabe können die Kinder berechnen, wie sich die Anzahl der Möglichkeiten für das Legen von vier Steinen in einer Reihe verändert, wenn sich die Spielfeldgröße ändert. Es kann auch untersucht werden, wie viele Möglichkeiten es mehr gibt, wenn nur drei Steine in eine Reihe gebracht werden sollen oder wie sich die Möglichkeiten verringern, wenn es fünf Steine in einer Reihe sein sollen.

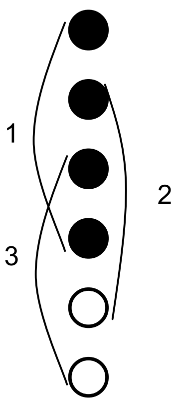
LÖSUNGSHINWEISE

Für die waagrechten Reihen:



Es gibt vier Möglichkeiten, in einer waagerechten Reihe vier Steine nebeneinander zu legen, da in jeder waagerechten Reihe sieben Plätze für einen Stein zur Verfügung stehen.
Da es sechs waagerechte Reihen gibt:
$6 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten, vier Steine in eine waagrechte Reihe zu legen.

Für die senkrechten Reihen:

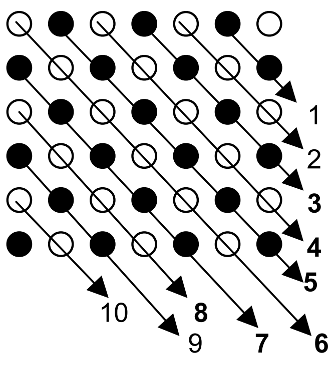


In den senkrechten Reihen stehen sechs Plätze für einen Stein zur Verfügung.
Daraus ergeben sich, wie nebenstehend aufgezeichnet, drei Möglichkeiten, vier Steine in eine Reihe zu legen.

Da es sieben senkrechte Reihen gibt:
$7 \cdot 3 = 21$ Möglichkeiten, vier Steine in eine senkrechte Reihe zu legen.

Für die diagonalen Reihen:

von links oben nach rechts unten



Es gibt nur in den Diagonalen 3, 4, 5, 6, 7 und 8 die Möglichkeit, vier Steine in eine Reihe zu legen.
Die Diagonalen 3 und 8 bieten genau eine Möglichkeit, vier Steine in eine Reihe zu legen.
Die Diagonalen 4 und 7 bieten genau zwei Möglichkeiten, vier Steine in eine Reihe zu legen.
Die Diagonalen 5 und 6 bieten genau drei Möglichkeiten, vier Steine in eine Reihe zu legen.
In der Summe sind es:
$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten, vier Steine in eine diagonale Reihe von links oben nach rechts unten zu legen.

Entsprechend gibt es zwölf Möglichkeiten, vier Steine in eine diagonale Reihe von links unten nach rechts oben zu legen.

Insgesamt ergeben sich also:
24 waagerechte, 21 senkrechte und 24 diagonale Möglichkeiten, vier Steine in eine Reihe zu legen. Es gibt also insgesamt 69 verschiedene Möglichkeiten.

Vier gewinnt: Die Meisterschaft

Das Spiel „Vier gewinnt“ eignet sich sehr gut, um im Rahmen des Mathematikzirkels oder mit einer anderen Gruppe von Kindern projektartig eine Meisterschaft durchzuführen. Durch seine leicht verständlichen Regeln und seinen meist raschen Spielverlauf kann innerhalb der Gruppe in überschaubarer Zeit herausgespielt werden, wer der „Vier gewinnt“-Meister ist.
Dabei bietet das Vorhaben, eine Meisterschaft auszutragen, viele Ansatzpunkte für mathematische Überlegungen. Auf einige soll im Folgenden eingegangen werden.
Wichtiger Bestandteil der Vorbereitungen sollte dabei sein, dass die Organisation so weit wie möglich von den Kindern übernommen wird.

Dazu sollte diskutiert werden:

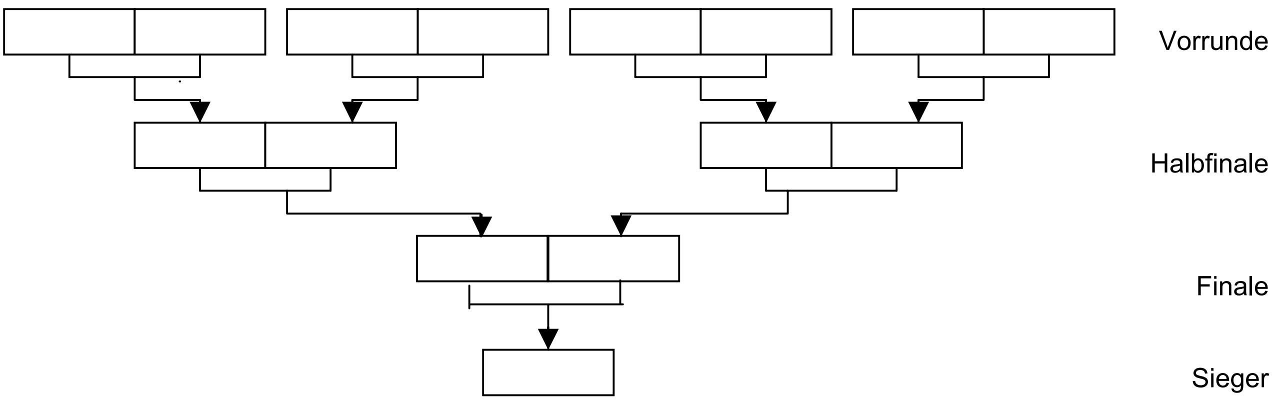
- Wie viele Spiele sind nötig und woher können wir die Spiele bekommen?
- Nach welchem Spielsystem wollen wir den Sieger ermitteln?
- Wie viele Spiele sind dann nötig, wie viel Zeit werden wir benötigen?
- Welches sind die Vor- und Nachteile der einzelnen Spielsysteme?
- Benötigen wir einen Schiedsrichter oder einen Spielleiter?
- Soll der Sieger einen Preis oder eine Urkunde bekommen?
- ...

Die Überlegungen zum Spiel- und Bepunktungssystem bieten besonders viele Ansätze für Überlegungen, die in das Gebiet der Mathematik hineinreichen. Durch ihren direkten Bezug zur unmittelbaren Realität vieler Kinder (Sportwettkämpfe, ...) werden die Kinder motiviert von ihren Wettkampferfahrungen zu berichten und verschiedene Spiel- und Bepunktungssysteme zu entwickeln.

Die Spielsysteme

a) Das K.O.-System

Das System ist vielen Kindern bekannt. Dabei werden die ersten Spielgegner ausgelost, der Sieger kommt jeweils eine Runde weiter.



Der Spielplan kann groß an der Tafel notiert werden.
Die jeweiligen Sieger werden in die Felder der nächsten Runde eingetragen.

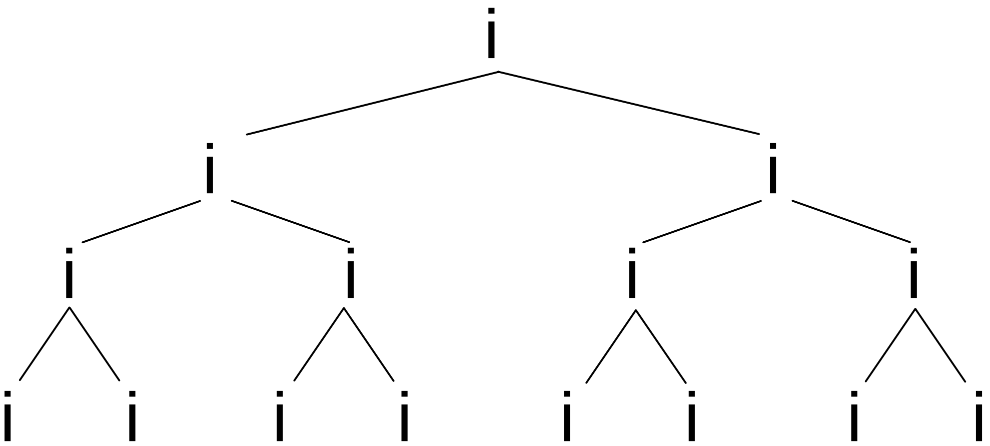
Fragen, die bei den Überlegungen zu diesem Spielsystem bedacht und diskutiert werden können:

1. Wie viele Spieler beteiligen sich bei dieser Meisterschaft?
2. Was passiert, wenn sich noch ein Kind mehr beteiligen möchte?
3. Welche Anzahlen von Spielern können sich bei diesem Spielsystem beteiligen? Wie kann man das herausfinden?

Bei diesem Spielplan beteiligen sich acht Spieler. Möglich sind beim k.o.-System nur Spieleranzahlen, die den Potenzen von zwei entsprechen, also: 2, 4, 8, 16, 32, ...

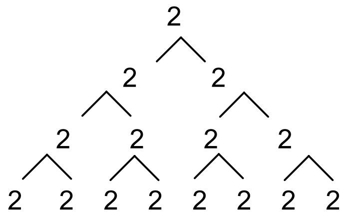
Wenn andere Anzahlen von Spielern mitmachen wollen, ergibt sich in einer Runde eine ungerade Anzahl von Spielern, so dass keine Spielpaare gebildet werden können.

Herausfinden lässt sich dieses durch Rückwärtsdenken:
Beginnend mit dem Finale werden z. B. durch ein Baumdiagramm die einzelnen Runden notiert. Das Benutzen von Baumdiagrammen ist nicht vielen Kindern geläufig. Hier bietet sich eine gute Gelegenheit, den Umgang mit diesen Diagrammen zu schulen.



...

oder einfacher:



B) PUNKTESYSTEM: JEDER GEGEN JEDEN, NUR HINRUNDE

Das Punktesystem, oder „Jeder gegen jeden"-System, kennen die Kinder vielleicht von der Bundesliga im Fußball.
Dabei spielt jeder gegen jeden und es gibt Punkte für den Sieg und nach Absprache auch für ein Unentschieden.
Die zu vergebenden Punkte müssen gemeinsam vor Beginn der Meisterschaft festgelegt werden. Im Anschluss kann berechnet werden, wie die Punkteverteilung und damit die Platzierung sich bei verschiedenen Punkteanzahlen je Sieg verändern würde.
Oft verwendet wird dabei:

- drei Punkte für den Sieg und einen Punkt für ein Unentschieden
- zwei Punkte für den Sieg und einen Punkt für ein Unentschieden

Für die Notation der Ergebnisse während der Meisterschaft sollen hier zwei Varianten vorgestellt werden. Der Laufzettel ist den Kindern sicher von der Stationsarbeit im Unterricht her bekannt. Eine andere Möglichkeit ist das Notieren der Ergebnisse in einer Tabelle.

Wie die Ergebnisse festgehalten werden, sollte von den Vorerfahrungen der Kinder und den mit der Durchführung der Meisterschaft beabsichtigten Zielen abhängig gemacht werden. Beide Notationsformen lassen sich auch kombinieren, indem zuerst alle Kinder einen Laufzettel führen und im Anschluss die Tabelle erstellt wird.

Der Laufzettel ist von den Kindern leicht auszufüllen. Jedes Kind notiert die Kinder, mit denen es gespielt hat und daneben, ob es gewonnen, verloren oder unentschieden gespielt hat. Dazu können Symbole verwendet werden, wie etwa eine Krone für den Sieg oder aber Abkürzungen.
In einer weiteren Spalte werden für jeden Sieg und jedes Unentschieden die Punkte eingetragen und addiert. Das kann durch das Kind selbst oder einen/mehrere Spielleiter erfolgen. Sieger ist, wer die meisten Punkte erhalten hat.
Ein Beispiel für eine Gruppe von 10 Kindern ist nebenstehend angegeben.

Name:			
Spiel-nummer	Name des anderen Kindes	Sieg Verloren Unentschieden	Punkte
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
		Gesamt:	

In der Tabelle werden alle Spielergebnisse von allen Spielerinnen und Spielern eingetragen. Dazu muss überlegt werden, wie der Sieg, die Niederlage oder das Unentschieden dargestellt werden sollen.
Möglich wäre hier, dass in das entsprechende Feld nur die Nummer des Siegers notiert wird. Für ein Unentschieden wird ein U eingetragen. Am Ende der Meisterschaft wird gezählt, wie oft jede Zahl eingetragen wurde, wie oft also der Spieler mit der Nummer gewonnen hat. Jeder Spieler hat dabei eine feste Nummer. Alternativ kann auch der ganze Name des Kindes eingetragen werden, insbesondere bei kleinen Gruppen ist dieses gut möglich und leichter verständlich.
Der Umgang mit Tabellen ist ein wichtiger Bestandteil in den Mathezirkeln und kann hier mit praktischer Anwendung aufgegriffen werden.

Die hier notierte Tabelle ist für 10 Spieler erstellt.

Name:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		–	–	–	–	–	–	–	–	–
2			–	–	–	–	–	–	–	–
3				–	–	–	–	–	–	–
4					–	–	–	–	–	–
5						–	–	–	–	–
6							–	–	–	–
7								–	–	–
8									–	–
9										–
10										

Fragen zum Verständnis der Tabelle:
- Warum sind einige Felder grau?
- Warum sind einige Felder durchgestrichen?
- Wie viele Spiele finden statt?

Beispiel für das Notieren der Ergebnisse:

Name:	1 Fred	2 Maria	3 Anne	4 Max	5 Tom	6 Tim	7 Deniz	8Jenny	9 Pia	10 Liz
1 Fred		-				-	-	-	-	-
2 Maria						-	-	-	-	-
3 Anne		3		-	-	-	-	-	-	-
4 Max					-	-	-	-	-	-
5 Tom						-	-	-	-	-
6 Tim										-
7 Deniz										-
8 Jenny										-
9 Pia						U				-
10 Liz										

Hier hat Maria gegen Anne gespielt. Anne hat gewonnen, deshalb wurde die Drei eingetragen.

Hier hat Tim gegen Pia gespielt. Das Spiel endete unentschieden, deshalb wurde ein „U“ eingetragen.

c) Punktesystem: jeder gegen jeden, Hinrunde und Rückrunde

Dieses Spielsystem entspricht im Wesentlichen dem Punktesystem von b). Jedoch spielen hier alle Kinder zweimal gegeneinander. In Gruppen mit wenigen Kindern ist dieses gut möglich. Die Kinder mögen dieses Spielsystem, weil sie öfter eine Chance zum Spielen haben.
Die Anmerkungen von b) gelten hier entsprechend.

Der Laufzettel (10 Kinder) wird um die Zeilen für die Rückrunde ergänzt:

Name:				
Spiel-nummer		Name des anderen Kindes	Sieg Verloren Unentschieden	Punkte
1	Hinrunde			
	Rückrunde			
2	Hinrunde			
	Rückrunde			
3	Hinrunde			
	Rückrunde			
4	Hinrunde			
	Rückrunde			
5	Hinrunde			
	Rückrunde			
6	Hinrunde			
	Rückrunde			
7	Hinrunde			
	Rückrunde			
8	Hinrunde			
	Rückrunde			
9	Hinrunde			
	Rückrunde			
			Gesamt:	

Die Fragen zur Förderung des Verständnisses der Tabelle gelten hier entsprechend zu b)

Name:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Die Kinder können sich noch einigen, wo in der Tabelle die Ergebnisse der Hinrunde und wo die Ergebnisse der Rückrunde notiert werden. Dieses hat aber keinen Einfluss auf die Platzierung.

3. Würfelkartei

ZU DEN AUFGABEN

Die Aufgaben der folgenden Würfelkartei wurden im Rahmen der Fortbildung zu den Mathematikzirkeln entwickelt und zusammengestellt. Sie greifen unterschiedliche Aspekte des Würfels, des Bauens und des Rechnens mit Würfeln auf.

Da die Aufgaben über einen längeren Zeitraum zusammengetragen, immer wieder weitergegeben und variiert wurden, sind die Quellen nicht immer bekannt.

Anregungen wurden entnommen aus:

- Durch das Land der Formen und Figuren, Volk und Wissen Verlag, Berlin 1999
- Käpnick, F.: Mathe für kleine Asse, Volk und Wissen Verlag, Berlin 2001

METHODISCHE HINWEISE

Die Gestaltung der Aufgaben als Kartei bietet die Möglichkeit, die Aufgaben im Stationsverfahren bearbeiten zu lassen. Ebenso ist es möglich, gezielt Aufgaben Kindern in die Hand zu geben oder einzelne Aufgaben von allen Kindern bearbeiten zu lassen und gemeinsam zu besprechen.

Die Aufgaben haben einen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad. In Zirkeln, in denen Kinder mit sehr unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und Vorerfahrungen gemeinsam arbeiten, hat sich dieses als sehr vorteilhaft erwiesen. Je nach der Zusammensetzung der Gruppe kann es nötig sein, einzelne Aufgaben herauszunehmen und nicht bearbeiten zu lassen. Die Nummerierung der Aufgaben erfolgte nicht nach dem Schwierigkeitsgrad, es ist also nicht Würfel 1 die leichteste Aufgabe usw. Es gibt jedoch inhaltliche Zusammenhänge zwischen einzelnen Karten. In den Kommentaren zu den einzelnen Aufgaben sind, soweit möglich, Angaben über den Schwierigkeitsgrad und inhaltliche Zusammenhänge angegeben.

Es sollte für die Kinder die Möglichkeit bestehen, mit Würfeln die Aufgaben nachzubauen. Es werden nur teilweise Spielwürfel benötigt, oft sind Würfel ohne Augen ebenso geeignet.

LÖSUNGSHINWEISE

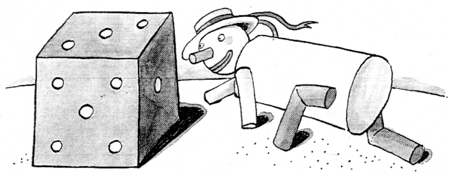
Zu jeder Karteikarte wurden Lösungshinweise und Lösungen einzeln notiert. Auf der unten stehenden Lösungskarte sind als schnelle Kontrollmöglichkeit bei der Arbeit mit den Kindern alle Lösungen in Kurzform notiert.

Lösungen der Würfelkartei			
Würfel 1 hinten:2,unten:4,links: 6 fehlende Augenzahlen: v.l.n.r.: 6,4,1	Würfel 2 a) 47 b) alle von 44 bis 54	Würfel 3 a) 44 b) 57 c) 71 d) 85 e) alle von 57 bis 62 f) alle von 71 bis 76 g) alle von 85 bis 90	Würfel 4 a) 36 b) 62
Würfel 5 a) 36 b) 104	Würfel 6 a) 48 b) 148	Würfel 7 a) 9 b) 9 c) 12	Würfel 8 a) 12 b) 15 c) 9
Würfel 9 a) 12 b) 10 c) 18	Würfel 10 a) 15 b) 21	Würfel 11 Figur 1 Figur 2 a) 12 a) 15 b) 4 b) 15	Würfel 12 Figur 1 Figur 2 a) 18 a) 25 b) 12 b) 20
Würfel 13 Fünferwürfel 1 2 a) 13 a) 49 b) 112 b) 76	Würfel 14 Fünferwürfel 1 2 a) 33 a) 37 b) 92 b) 88	Würfel 15 a) 8 b) 24 c) 24 d) 8	Würfel 16 Die ⚀ liegt oben.

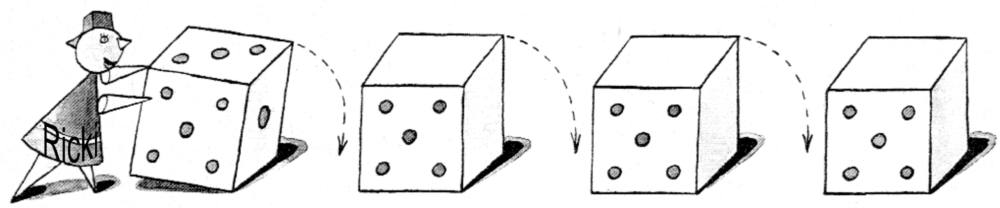
Würfel 1

a) Welche Augenzahlen befinden sich auf den nicht sichtbaren Seiten?

hinten: ____
unten: ____
links: ____



b) Ricki kippt den Würfel so, dass vorn immer die Fünf ( ) zu sehen ist.
Trage in die Würfel die fehlenden Augenzahlen ein!

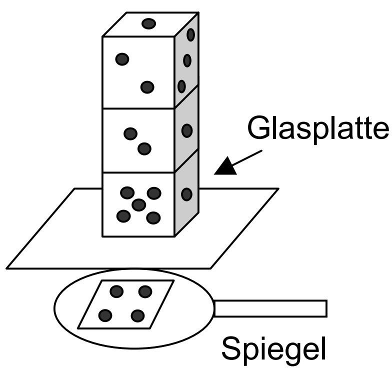


Lit: Grassmann, M.: Durch das Land der Formen und Figuren, Volk und Wissen Verlag, Berlin.

Würfel 2

Berechne die Summe der sichtbaren Augenzahlen, wenn man von oben, von unten und von allen Seiten auf den Würfelturm sehen kann!

a) bei diesem Dreierturm



b) Welche Summen sind bei Dreiertürmen möglich, wenn man auf die obere, auf die untere und auf alle seitlichen Flächen sehen kann?
c) Stelle deine Ergebnisse und Entdeckungen übersichtlich dar!

Anregung aus: Käpnick, F.: Mathe für kleine Asse, Volk und Wissen Verlag, Berlin.

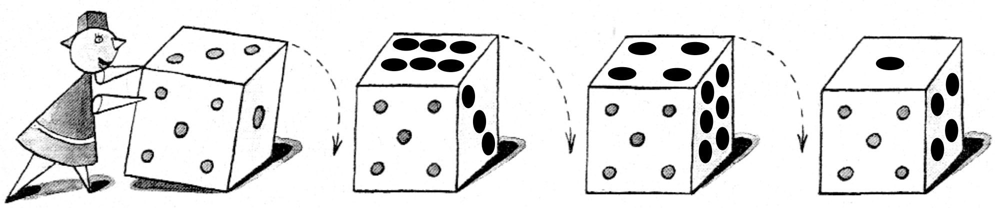
Würfel 1

ZUR AUFGABE
Diese Aufgabe kann dazu genutzt werden, die Kinder mit dem Spielwürfel und seinem Aufbau vertraut zu machen. Sie ist leicht zu bearbeiten und kann auch als Einstieg in die Kartei oder für ähnliche Aufgaben genutzt werden.

METHODISCHE HINWEISE
Spielwürfel sollten verfügbar sein.

LÖSUNGSHINWEISE
a) Die Summe der Augen der gegenüberliegenden Seiten beträgt immer 7.
➔ hinten: 2, unten: 4, links: 6

b)



Würfel 2

ZUR AUFGABE
Sollte den Kindern noch nicht bekannt sein, dass die Augensumme der gegenüberliegenden Seiten sieben beträgt, so kann dieses mit dieser Aufgabe herausgearbeitet werden. Ebenso kann das vorteilhafte Rechnen und das systematische Überlegen anhand dieser leicht überschaubaren Aufgabenstellung geübt werden.

METHODISCHE HINWEISE
Spielwürfel sollten für die Hand des Schülers verfügbar sein.
zu b) und c): Hier kann die Lösung mittels einer Tabelle erfolgen, in die die Ergebnisse systematisch eingetragen werden. Auch andere Notationsformen, etwa das Aufzeichnen der Würfel sind möglich, jedoch aufwendiger. (vgl. auch 2.8 „Knobeleien mit Würfeln“ in dieser Handreichung)

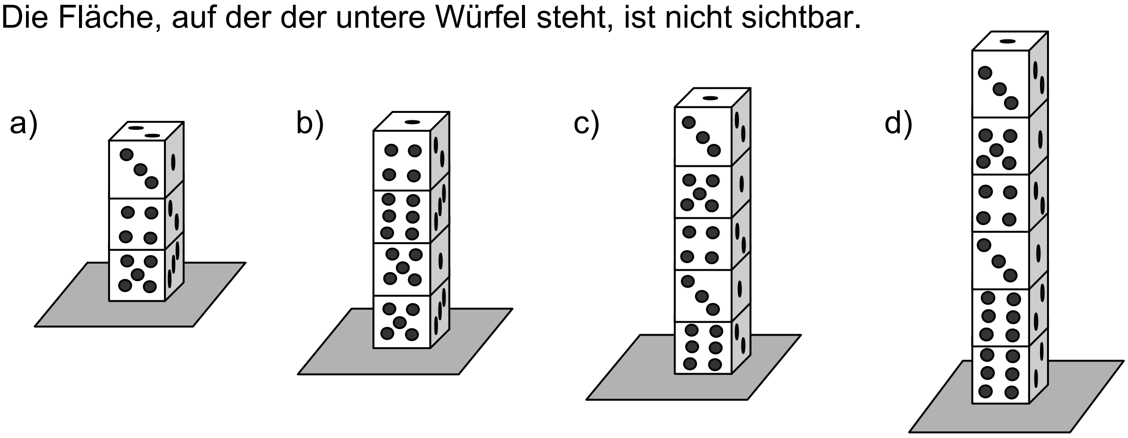
LÖSUNGSHINWEISE
zu a) Für jeden Würfel beträgt die Summe der Seitenflächen vorn und hinten, sowie links und rechts jeweils 7. Für drei Würfel ergibt sich also: $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$. Mit der Eins auf der oberen Fläche des oberen Würfels und der Vier auf der unteren Würfelfläche des unteren Würfels ergibt sich eine Gesamtsumme von 46 ($42 + 1 + 4 = 47$).
zu b) Die Summe der Seitenflächen (vorn, hinten, rechts, links) beträgt bei drei Würfel zusammen immer 42. (vgl. a)
Die obere Fläche des oberen Würfels und die untere Fläche des unteren Würfel können jeweils alle Augenzahlen von eins bis sechs zeigen. Eine Möglichkeit für eine Tabelle ist hier notiert:

obere Fläche des oberen Würfels	1	1	1	1	1	1	2	2	2	...	...	5	5	5	6	6	6	6	6	6
Summe der Augen der Seitenflächen	42	42	42	42	42	42	42	42	42			42	42	42	42	42	42	42	42	42
untere Fläche des unteren Würfels	1	2	3	4	5	6	1	2	3	...	...	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Summe	44	45	46	47	48	49	45	46	47	...	...	51	52	53	49	50	51	52	53	54

Aus der Tabelle wird deutlich, dass alle Anzahlen zwischen 44 und 54 erreicht werden können.

Würfel 3

Berechne die Summe der sichtbaren Augen bei den einzelnen Türmen!
Die Fläche, auf der der untere Würfel steht, ist nicht sichtbar.



e) Welche Summen sichtbarer Augenzahlen sind bei Vierertürmen möglich?

f) Welche Summen sichtbarer Augenzahlen sind bei Fünfertürmen möglich?

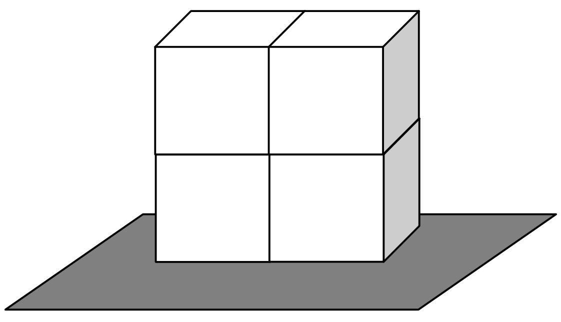
g) Welche Summen sichtbarer Augenzahlen sind bei Sechsertürmen möglich?

h) Kannst du etwas entdecken, wenn du die Ergebnisse von e), f) und g) untersuchst?

Würfel 4

a) Welches ist die kleinstmögliche Summe der sichtbaren Augenzahlen für diesen Würfelbau?

b) Welches ist die größtmögliche Summe der sichtbaren Augenzahlen für diesen Würfelbau?



Würfel 3

ZUR AUFGABE

Diese Aufgabe greift Aspekte der Aufgabe „Würfel 2“ auf. Jedoch ist hier die Anzahl der Würfel je Turm verschieden und man kann nur die Seitenflächen (vorn, hinten, links, rechts) und die obere Fläche des oberen Würfels sehen.

METHODISCHE HINWEISE

Spielwürfel sollten verfügbar sein.

LÖSUNGSHINWEISE

zu a) $3 \cdot 14 + 2 = 44$ zu b) $4 \cdot 14 + 1 = 57$ zu c) $5 \cdot 14 + 1 = 71$ zu d) $6 \cdot 14 + 1 = 85$

zu e) Die Summe der Seitenflächen (vorn, hinten, links, rechts) beträgt immer $4 \cdot 14 = 56$. Die Augenzahl der oberen Fläche des oberen Würfels kann alle möglichen Augenzahlen betragen. Also ergibt sich: für Vierertürme kann die Summe der sichtbaren Augen 57 bis 62 betragen.
zu f): entsprechend e): $5 \cdot 14 = 70$, ➔ 71 bis 76
zu g: entsprechend e): $6 \cdot 14 = 84$, ➔ 85 bis 90
zu h) Hier können verschiedene Zusammenhänge erkannt werden. Möglich wäre: der Unterschied der jeweils kleinsten möglichen Summe bei den sich jeweils um einen Würfel vergrößernden Türme ist jeweils 14. (Entsprechend für die jeweils größte Summe)

Würfel 4

ZUR AUFGABE

Bei den Aufgaben zu den Würfelbauten müssen die Kinder ihr Wissen über die Augenzahlen des Spielwürfels anwenden.

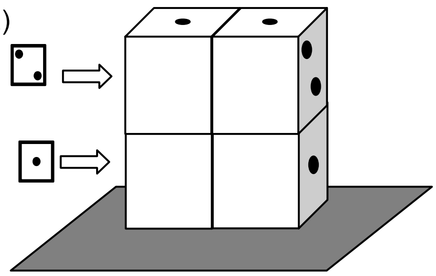
METHODISCHE HINWEISE

Den Kindern sollten Spielwürfel zur Verfügung stehen, um sich die Aufgaben handelnd erschließen zu können. Wenn die Kinder die Aufgaben „Würfel 3“, „Würfel 4“ und „Würfel 5“ nacheinander bearbeiten, können sie Zusammenhänge zwischen den Würfelbauten und sich daraus ergebende Schlussfolgerungen für das Erfüllen der Aufgabenstellung finden sowie diese Zusammenhänge für die Lösung der Aufgabe nutzen (siehe dazu Lösungshinweise der drei Aufgaben).

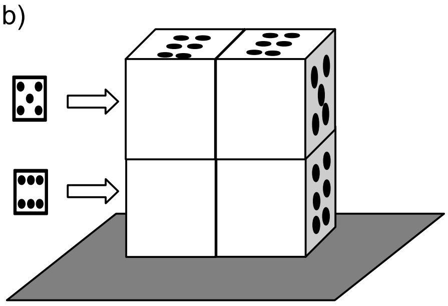
LÖSUNGSHINWEISE

Die Summe der Augen der Vorder- und Rückseite des Würfelbaus beträgt, da für jeden Würfel sieben, insgesamt 28.
Unterschiedliche Gesamtaugenzahlen können also lediglich durch die oberen Flächen und die vier Seitenflächen erreicht werden.
Für a) versucht man diese Augenzahlen möglichst klein zu halten, für b) entsprechend möglichst groß.
Die Lösungen sind rechts angegeben. Die Augen auf der Vorder- und Rückseite sind dabei durch den Aufbau des Spielwürfels bestimmt.
a) 36 Augen beträgt die kleinstmögliche Summe.
b) 62 Augen beträgt die größtmögliche Summe.

a)



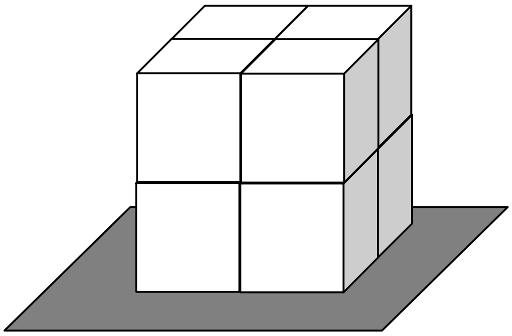
b)



Würfel 5

a) Welches ist die kleinstmögliche Summe der sichtbaren Augenzahlen für diesen Würfelbau?

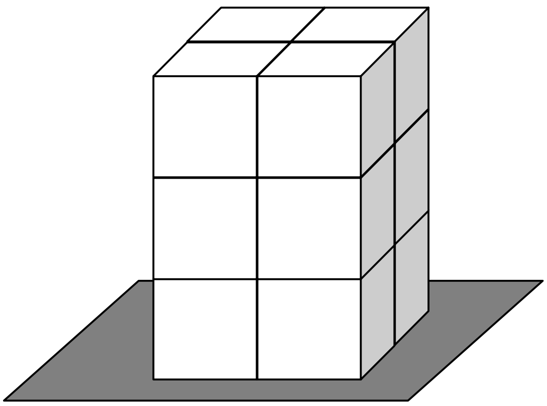
b) Welches ist die größtmögliche Summe der sichtbaren Augenzahlen für diesen Würfelbau?



Würfel 6

a) Welches ist die kleinstmögliche Summe der sichtbaren Augenzahlen für diesen Würfelbau?

b) Welches ist die größtmögliche Summe der sichtbaren Augenzahlen für diesen Würfelbau?



Würfel 5

ZUR AUFGABE

Diese Aufgabe baut aus inhaltlicher Sicht auf der Aufgabe „Würfel 4“ auf.

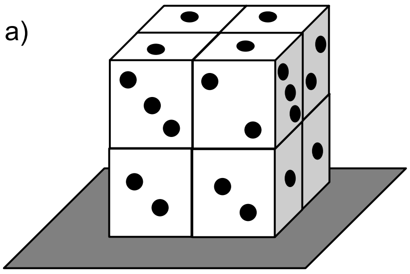
METHODISCHE HINWEISE

vgl. Aufgabe „Würfel 4“

LÖSUNGSHINWEISE

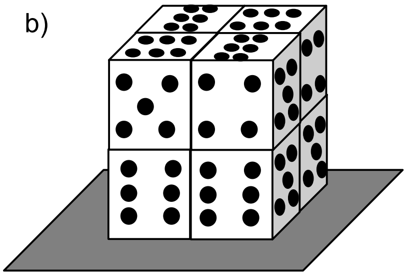
Die Summe der sichtbaren Augenzahlen wird durch die vier oberen Augenzahlen, durch die jeweils vier Augenzahlen an den linken und rechten Seitenflächen sowie durch die Augenzahlen der Vorder- und Rückseite bestimmt. Dabei muss beachtet werden, wie viele Seiten der Spielwürfel jeweils sichtbar sind. Von den vier Würfeln der unteren Etage sind jeweils zwei Augenzahlen sichtbar, während bei den vier Würfeln der oberen Etage jeweils drei Augenzahlen sichtbar sind.
Will man nun eine möglichst kleine Gesamtsumme erreichen, wird man sich bei den unteren Würfeln für die Eins und die Zwei entscheiden, während man sich bei den oberen für die Eins, Zwei und Drei entscheiden muss. Entsprechend wird die Aufgabe für die größtmögliche Summe gelöst.

a)



Summe insgesamt: 36
($8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 36$)

b)



Summe insgesamt: 104
($8 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 104$)

Würfel 6

ZUR AUFGABE

Diese Aufgabe steht in inhaltlichem Zusammenhang mit den Aufgaben „Würfel 4“ und „Würfel 5“.

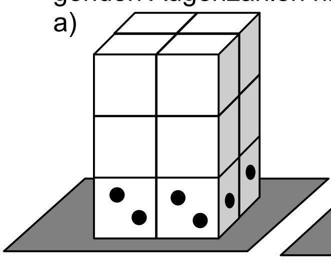
METHODISCHE HINWEISE

vgl. Aufgabe „Würfel 4“

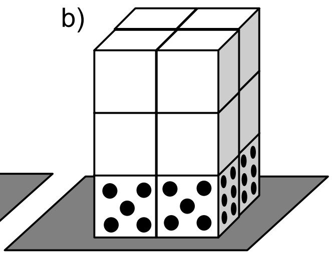
LÖSUNGSHINWEISE

Dieser Würfelbau unterscheidet sich von dem in Aufgabe „Würfel 5“ dadurch, dass es eine „Etage“ mehr gibt. Es gelten für diese mittlere Etage die gleichen Überlegungen zur Augenanzahl wie bei der unteren Würfelschicht in Aufgabe 5. Zur Würfelsumme kommen also jeweils für die Aufgaben a) und b) die folgenden Augenzahlen hinzu:

a)



b)



a) Es kommen $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 12$ Augen hinzu.
   $36 + 12 = \underline{48}$
b) Es kommen $4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 44$ Augen hinzu.
   $104 + 44 = \underline{148}$

Will man die Aufgabe ohne die Ergebnisse der Aufgabe 5 lösen, können die einzelnen Augenzahlen zur besseren Übersicht in einer Tabelle notiert werden. Ein Beispiel dafür:

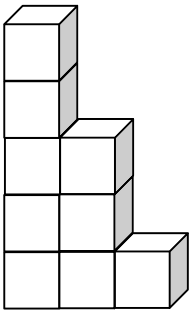
<table>
<tr><td></td><td colspan="10">Augenzahlen</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">vorn</td><td colspan="2">hinten</td><td colspan="2">oben</td><td colspan="2">rechts</td><td colspan="2">links</td><td></td></tr>
<tr><td>obere Etage</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>mittlere Etage</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>untere Etage</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Summe der Augenzahlen</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
</table>

<u>Gesamtsumme</u>

Würfel 7

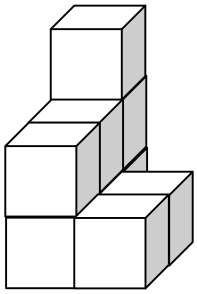
Wie viele Würfel sind es? Baue so um, dass du es ganz schnell siehst!

a)

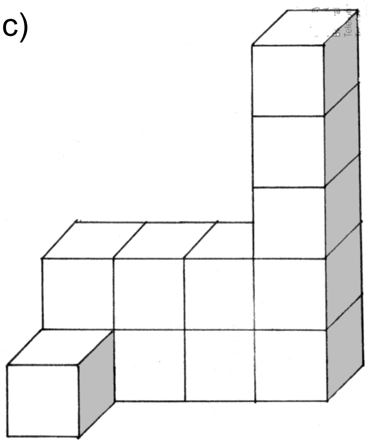


3 + 3 + 3 = __

b)



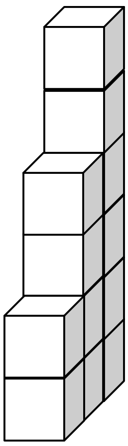
c)



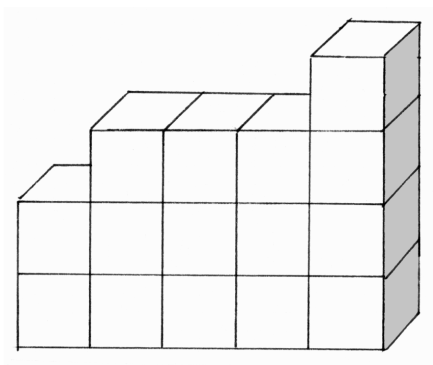
Würfel 8

Wie viele Würfel sind es? Baue so um, dass du es ganz schnell siehst!

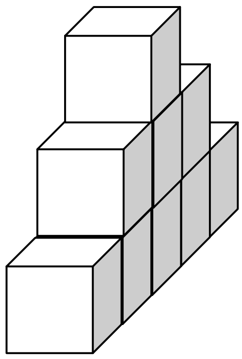
a)



b)



c)



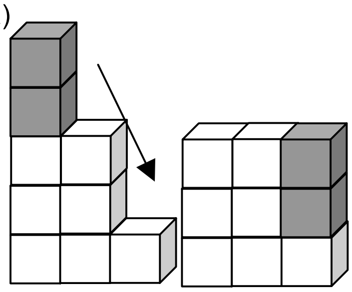
Würfel 7

ZUR AUFGABE
Diese Aufgaben dienen der Schulung der räumlichen Vorstellung. Gleichzeitig wird das Lesen von Zeichnungen geübt, dass einen wichtigen Bestandteil beim Kommunizieren über mathematische Sachverhalte darstellt. Das Lesen von Zeichnungen über Würfelbauten zu fördern ist eine gute Möglichkeit, weil Kinder viele Vorerfahrungen mit den Bauten, den „realen Objekten" haben.

METHODISCHE HINWEISE
Manche Kinder können die Zeichnungen erst dann sicher lesen, wenn sie die Würfelbauten wirklich gebaut haben. Andere können sich ohne diese praktischen Erfahrungen auch komplexe Bauten leicht vorstellen. Es sollte in jedem Fall eine ausreichende Anzahl von Würfeln zur Verfügung stehen.
Die Lösungshinweise sind hier so gestaltet, dass sie ggf. kopiert den Kindern als Tipps oder Kontrollmöglichkeit zur Verfügung gestellt werden können.

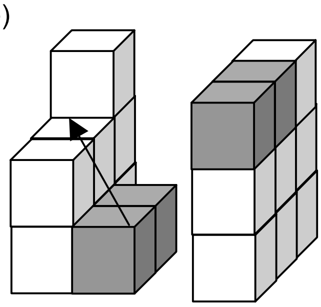
LÖSUNGSHINWEISE

a)



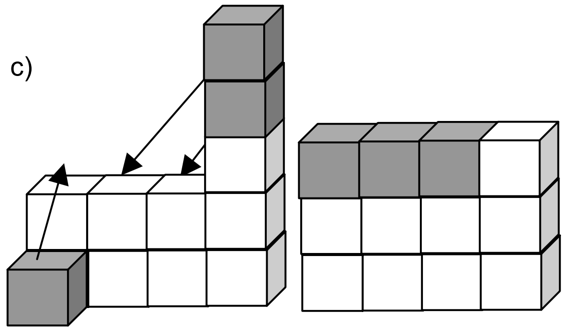
$3 + 3 + 3 = 3 \cdot 3 = 9$

b)



$3 + 3 + 3 = 3 \cdot 3 = 9$

c)



$4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$

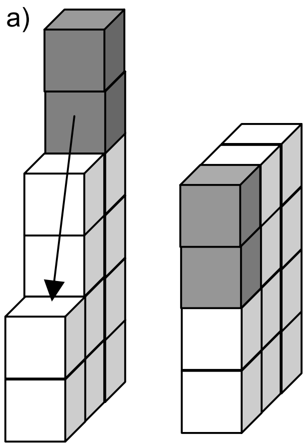
Würfel 8

ZUR AUFGABE
vgl. Aufgabe „Würfel 7"

METHODISCHE HINWEISE
vgl. Aufgabe „Würfel 7"

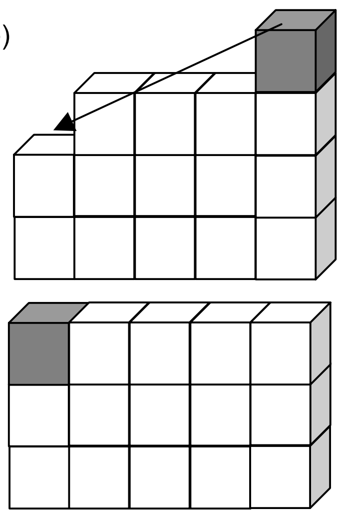
LÖSUNGSHINWEISE

a)



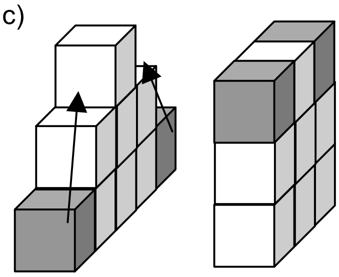
$4 \cdot 3 = 12$

b)



$5 \cdot 3 = 15$

c)

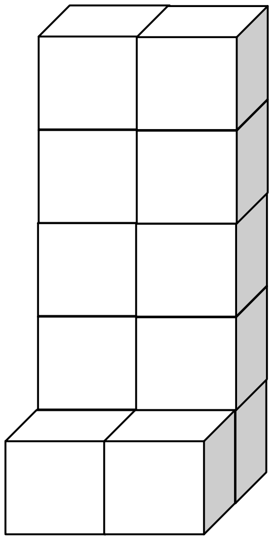


$3 \cdot 3 = 9$

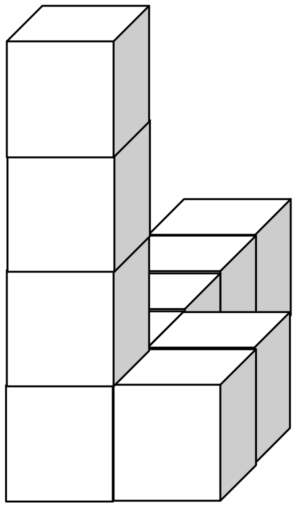
Würfel 9

Baue die Körper! Schreibe vorher auf, wie viele Würfel du benötigst!

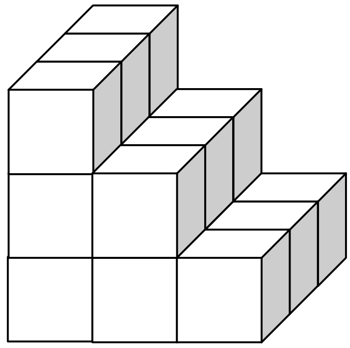
a)



b)



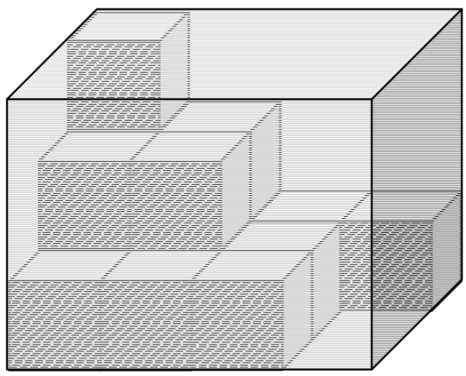
c)



Würfel 10

a) Wie viele Würfel sind schon im Quader?

b) Wie viele Würfel fehlen noch, damit der Quader ganz ausgefüllt ist?

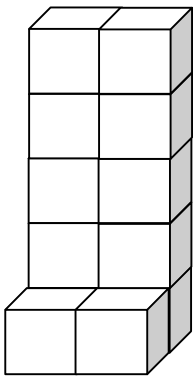


Würfel 9

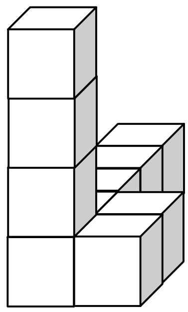
ZUR AUFGABE
vgl. Aufgabe „Würfel 7“

METHODISCHE HINWEISE
vgl. Aufgabe „Würfel 7“
Eventuell kann der Hinweis gegeben werden, dass die Würfelbauten innen nicht hohl sind, dass also Würfel für Würfel aufeinander aufgebaut wurde.

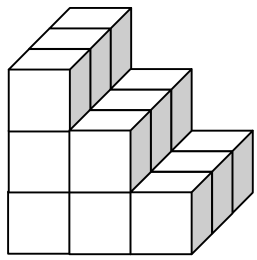
LÖSUNGSHINWEISE
a) 12



b) 10



c) $3 \cdot 6 = 18$

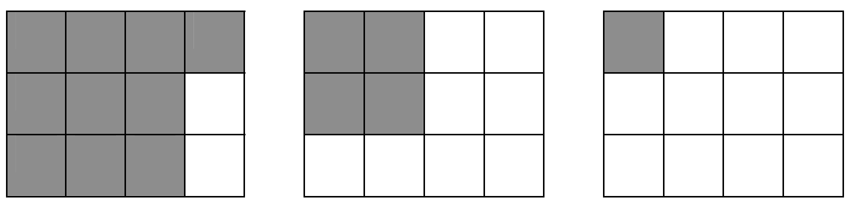


Würfel 10

ZUR AUFGABE
Die Aufgabe stellt eine Steigerung in den Anforderungen an das räumliche Vorstellungsvermögen im Vergleich zu den Aufgaben Würfel 7 bis Würfel 9 dar. Der sichtbare Würfelbau soll zu einem Quader ergänzt werden. Dieser Quader ist in der Zeichnung mit angegeben.

METHODISCHE HINWEISE
Wenn die Kinder bereits mehrere Aufgaben zu diesem Thema bearbeitet haben, sollten sie hier versuchen, die Aufgabe ohne das Bauen des Turmes zu lösen. Als eine erfolgreiche Strategie, die man den Kindern nennen könnte, gilt es, die vorhandenen und fehlenden Würfel etagenweise zu zählen. Dabei kann unterstützend eine Zeichnung jeder Etage angefertigt werden.
vgl. auch die Hinweise zu den Aufgaben „Würfel 11“ und „Würfel 12“

LÖSUNGSHINWEISE

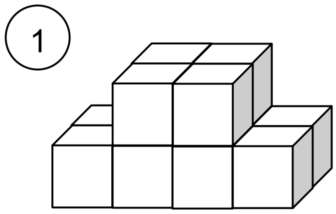


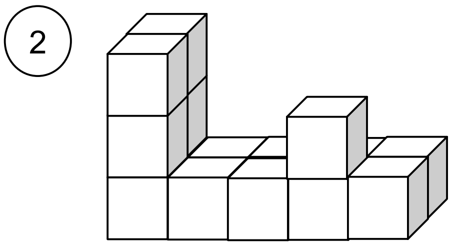
	Draufsicht auf die erste Etage	Draufsicht auf die zweite Etage	Draufsicht auf die dritte Etage
vorhandene Würfel	10	4	1
fehlende Würfel	2	8	11

a) Insgesamt sind es schon 10 + 4 + 1 = 15 Würfel.
b) Es fehlen noch 2 + 8 + 11 = 21 Würfel.

Würfel 11

a) Wie viele Würfel werden zum Bauen benötigt?
Prüfe nach, indem du die Gebäude baust!

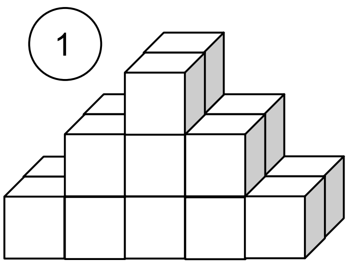


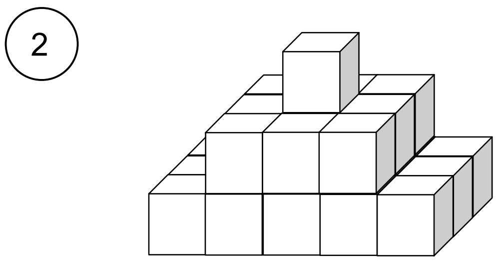


b) Jeder der beiden Würfelbauten soll zu einem möglichst kleinen Quader ergänzt werden. Wie viele Würfel werden dazu noch benötigt?

Würfel 12

a) Wie viele Würfel werden zum Bauen benötigt?
Prüfe nach, indem du die Gebäude baust!





b) Jeder der beiden Würfelbauten soll zu einem möglichst kleinen Quader ergänzt werden. Wie viele Würfel werden dazu noch benötigt?

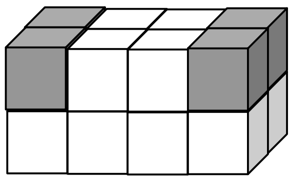
Würfel 11

ZUR AUFGABE
Diese Aufgabe hat Parallelen zur Aufgabe „Würfel 10“. Jedoch ist der Quader, zu dem der Würfelbau ergänzt werden soll, nicht mit eingezeichnet.

METHODISCHE HINWEISE
Würfel sollten zur Verfügung stehen. Es muss im Vorwege geklärt werden, ob die Kinder den Begriff „Quader“ kennen. Die Aufgabe wird leichter, wenn Würfel in zwei Farben benutzt werden können. Wenn die Bauten in der ersten Farbe erstellt wurden, kann mit Würfeln in der zweiten Farbe zum Quader ergänzt werden. Wenn sich das Kind dabei verzählt, ist durch die zweite Farbe das Nachzählen möglich, ohne ganz von vorn anzufangen.
Wenn die Ergänzung zum Quader ohne praktisches Handeln erfolgt, ist die Aufgabe schwieriger zu lösen.
Vergleiche zum Finden des richtigen Quaders auch die Hinweise in Aufgabe „Würfel 12“.

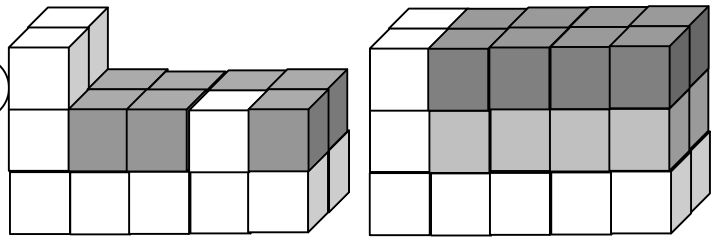
LÖSUNGSHINWEISE

1



a) 12 Würfel werden benötigt.
b) 4 Würfel werden für die Ergänzung zum Quader benötigt.

2



a) 15 Würfel werden benötigt.
b) Für die zweite Etage werden noch 7 Würfel, für die obere Etage werden noch 8 Würfel, zusammen 15 Würfel benötigt.

Würfel 12

ZUR AUFGABE
vgl. Aufgabe „Würfel 11“

METHODISCHE HINWEISE
vgl. auch Aufgabe „Würfel 11“
Als Hinweis für das Finden des kleinstmöglichen Quaders kann gegeben werden, dass der umgebende Quader bestimmt ist durch die bereits bestehenden Anzahlen von Würfel in Höhe, Breite und Länge. Für den Würfelbau 1 heißt das: der kleinstmögliche Quader ist also drei Würfel hoch, zwei Würfel breit und fünf Würfel lang. Was dabei mit den Begriffen „Höhe“ und insbesondere „Breite“ und „Länge“ gemeint ist, muss mit allen abgesprochen werden.

LÖSUNGSHINWEISE
Ein systematisches Vorgehen ist vorteilhaft, z. B. können die Würfel etagenweise ausgezählt werden. Bei dem Würfelbau 1 kann die Anzahl der direkt von vorn sichtbaren Würfel verdoppelt werden.

Würfelbau 1		
	a) benötigte Würfel	b) zum Quader fehlende Würfel
obere Etage	2	8
mittlere Etage	6	4
untere Etage	10	0
Gesamt	18	12

Würfelbau 2		
	a) benötigte Würfel	b) zum Quader fehlende Würfel
obere Etage	1	14
mittlere Etage	9	6
untere Etage	15	0
Gesamt	25	20

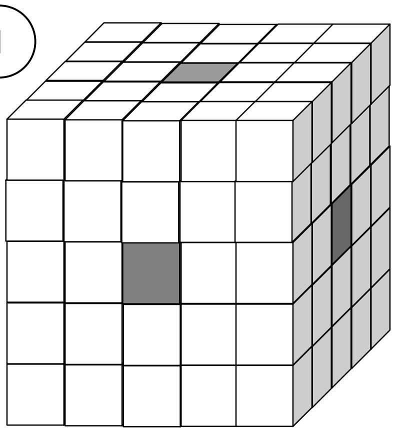
Würfel 13

Die dunkel eingefärbten Würfel werden aus dem Fünferwürfel durchgehend herausgenommen.

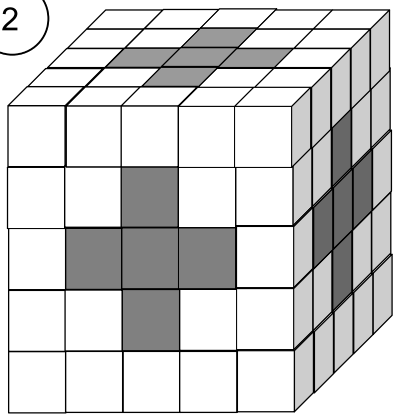
a) Wie viele Würfel werden entfernt?

b) Wie viele Würfel bleiben übrig?

1



2



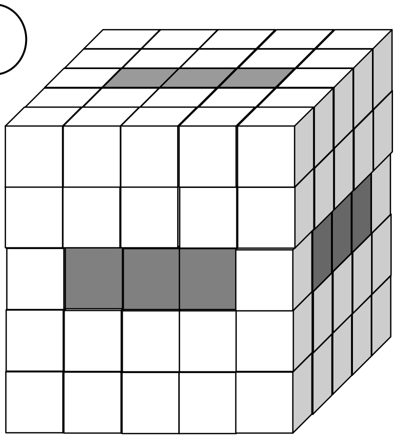
Würfel 14

Die dunkel eingefärbten Würfel werden aus dem Fünferwürfel durchgehend herausgenommen.

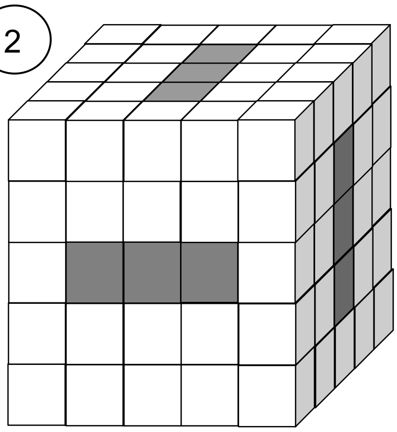
a) Wie viele Würfel werden entfernt?

b) Wie viele Würfel bleiben übrig?

1



2



Würfel 13

ZUR AUFGABE

Diese Aufgaben schulen das räumliche Vorstellungsvermögen. Sie können i. d. R. nicht nachgebaut werden, müssen also allein in der Vorstellung oder zeichnerisch gelöst werden. Diese Aufgaben sind recht schwierig und stellen für viele Kinder eine wirkliche Herausforderung dar.

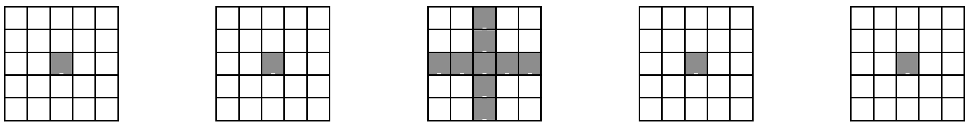
METHODISCHE HINWEISE

Die Kinder sollten, bevor sie diese Aufgaben lösen, bereits Erfahrungen mit ähnlichen aber weniger komplexen Aufgaben gesammelt haben. Insbesondere sollten sie Techniken zum Lösen geometrischer Aufgaben kennen gelernt haben, etwa das Gliedern des Körpers in überschaubare Teile.

LÖSUNGSHINWEISE

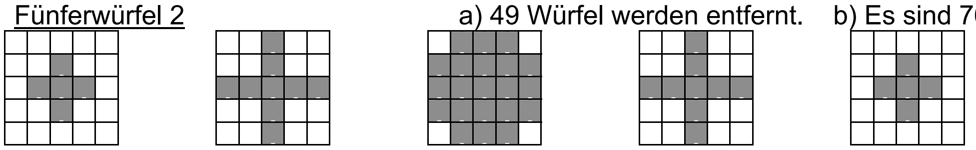
Ein Betrachten jeder einzelnen Etage bietet sich hier an. Die hellen Würfel sind vorhanden, die dunklen Würfel wurden heraus genommen. Gezeichnet wurde hier jeweils die Draufsicht (Sicht von unten ist identisch) auf die einzelnen Etagen.

Fünferwürfel 1 a) 13 Würfel werden entfernt. b) Es sind 112 Würfel übrig.



unterste Etage zweite Etage mittlere Etage vierte Etage oberste Etage

Fünferwürfel 2 a) 49 Würfel werden entfernt. b) Es sind 76 Würfel übrig.



Würfel 14

ZUR AUFGABE

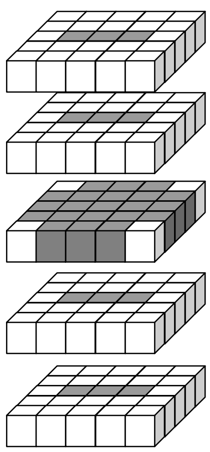
vgl. Aufgabe „Würfel 13“

METHODISCHE HINWEISE

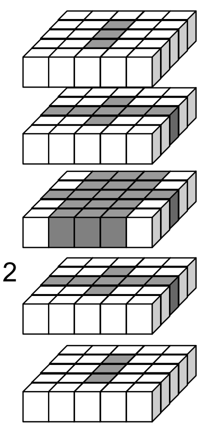
(vgl. Aufgabe „Würfel 13“) Kinder, die sich nicht systematisch die Würfel zerlegen und aufzeichnen, beschreiben diese beiden Fünferwürfel oft als schwerer als die beiden der Aufgabe „Würfel 13“.
Eine zur Erörterung mit den Kindern interessante Fragestellung könnte sein, warum bei beiden Würfeln unterschiedlich viele kleine Würfel heraus genommen wurden, obwohl doch an jeder Seitenfläche der beiden großen Würfel genau drei Würfel fehlen.

LÖSUNGSHINWEISE

Als Alternative zur Darstellung in den Lösungshinweisen zur Aufgabe „Würfel 13“ wird hier eine räumliche Darstellung angegeben. Diese wird so sicher nicht von den Kindern entwickelt werden. Größer kopiert kann sie beim Besprechen der Aufgaben nach der Bearbeitung als Hilfestellung dienen.



Fünferwürfel 1



Fünferwürfel 2

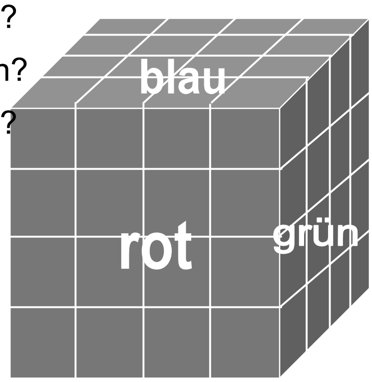
a) 33 Würfel werden entfernt.
b) Es sind 92 Würfel übrig

a) 37 Würfel werden entfernt.
b) Es sind 88 Würfel übrig.

Würfel 15

Ein großer Würfel ist in 64 gleich große kleine Würfel zerschnitten.
Die sechs Außenflächen des großen Würfels sind in drei Farben bemalt.
Die sich gegenüberliegenden Flächen haben jeweils die gleiche Farbe:
Ober- und Unterseite des Würfels sind blau, Vorder- und Rückseite sind rot und die beiden Seiten rechts und links sind grün.

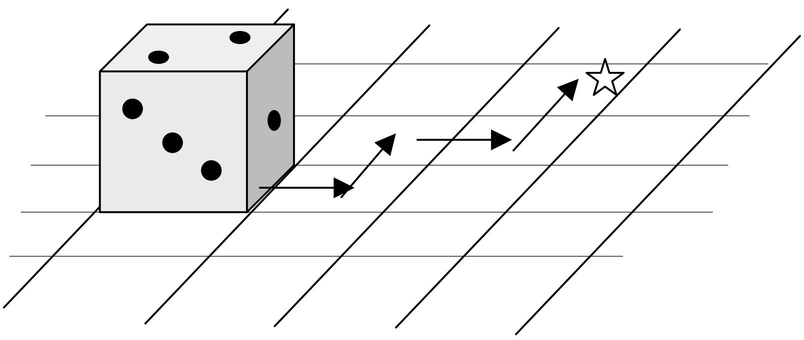
a) Wie viele kleine Würfel gibt es ohne Farbe?
b) Wie viele kleine Würfel gibt es mit genau einer Farbe?
c) Wie viele kleine Würfel gibt es mit genau zwei Farben?
d) Wie viele kleine Würfel gibt es mit genau drei Farben?



Würfel 16

Auf einem Spielfeld ist ein Würfel abgelegt. Er wird in Pfeilrichtung, jeweils über eine Kante, über das Spielfeld gekippt.

Wie viele Punkte sind auf der oberen Würfelseite zu sehen, wenn der Würfel in dem Feld mit dem Stern angekommen ist?



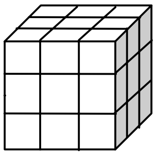
Würfel 15

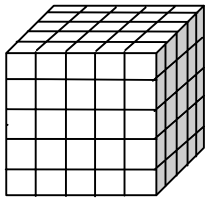
ZUR AUFGABE

Diese Aufgabe schult, ebenso wie die vorangegangenen, die räumliche Vorstellung der Kinder. Ein Teil der kleinen Würfel ist sichtbar und bietet so eine gute Möglichkeit, sich die Aufgabenstellung zu erschließen.

METHODISCHE HINWEISE

Die Kinder müssen von den sichtbaren Seiten des großen Würfels auf die verdeckten Seiten schließen.
Eine weiterführende Aufgabenstellung ist: Löse die Aufgaben a) bis d) für große Würfel, die in andere Anzahlen von kleinen Würfeln zerschnitten wurden. Beispiele:





LÖSUNGSHINWEISE

a) Da alle Seiten bemalt wurden, sind nur die inneren Würfel ohne Farbe, in der zweiten und dritten Etage jeweils vier Würfel. $2 \cdot 4 = 8$
b) Da alle kleinen Würfel, die die Kanten und Ecken des großen Würfels bilden, mit mehr als einer Farbe bemalt wurden, sind nur die vier inneren Würfel der Seitenflächen einfarbig. $6 \cdot 4 = 24$
c) Jeder Würfel hat 12 Kanten. An jeder Kante gibt es zwei zweifarbige Würfel: $12 \cdot 2 = 24$.
d) Dreifarbig sind alle Eckwürfel des großen Würfels: 8

Würfel 16

ZUR AUFGABE

Als Voraussetzung für diese Aufgabe müssen die Kinder den Spielwürfel gut kennen. Außerdem brauchen sie räumliches Vorstellungsvermögen, um die Bewegungen des Würfels nachzuvollziehen.

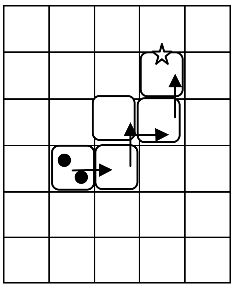
METHODISCHE HINWEISE

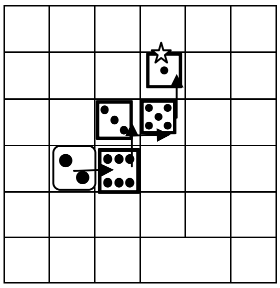
Je nach den Vorerfahrungen der Kinder ist ein Plan mit Kästchen in der Größe einer Würfelfläche und eingezeichneten Pfeilen, sowie ein Spielwürfel eine Erleichterung für das Lösen der Aufgabe. Es sollte jedoch angestrebt werden, dass die Kinder versuchen, diese Aufgabe ohne Material zu lösen. Anschließend könnten die Kinder eigene Aufgaben erstellen. Dazu zeichnen sie sich selbst einen Plan oder nutzen den unten stehenden Blankoplan.

LÖSUNGSHINWEISE

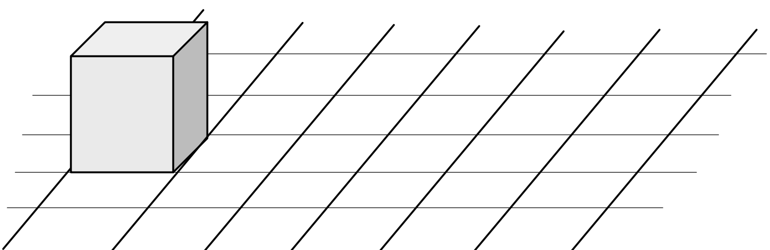
Das Lösen der Aufgabe könnte in einem solchen Plan erfolgen.

Auf dem Plan ist die Draufsicht des Würfels gezeichnet. Trage jeweils die richtigen Augenzahlen ein!





Somit ist im Feld mit dem Stern auf der oberen Würfelfläche die Eins zu sehen.



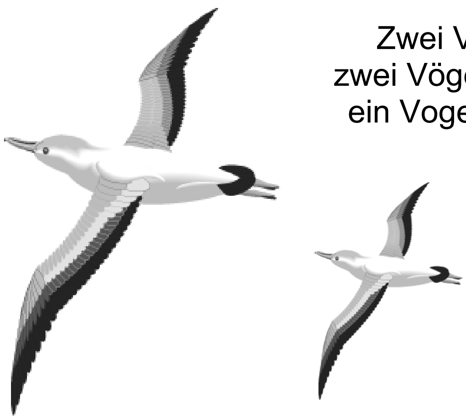
Mit Hilfe dieses Blankoplans können die Kinder selbst Aufgaben entwickeln.

4. Kleine Knobel- und Scherzaufgaben

Der Formationsflug der Vögel

Nenne die kleinste Anzahl von Vögeln, die in dieser Formation fliegen können:

Zwei Vögel vor einem Vogel,
zwei Vögel hinter einem Vogel und
ein Vogel zwischen zwei Vögeln.

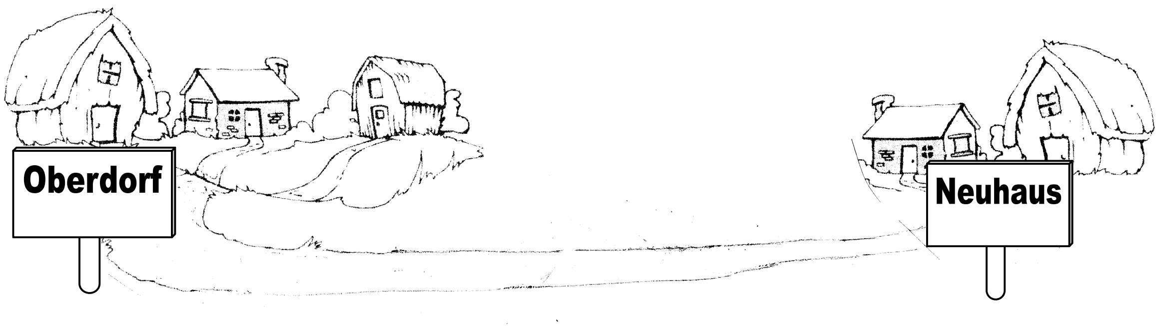


aus: Dahl, K. / Nordquist, S.: Zahlen, Spiralen und magische Quadrate, Verlag Friedrich Oetinger, Hamburg.

Oberdorf und Neuhaus

Mutter Schmidt fährt mit ihrem Auto von ihrem Haus in Oberdorf in den Nachbarort Neuhaus.
Zur gleichen Zeit fährt ihre Tochter in Neuhaus mit dem Fahrrad los in Richtung Oberdorf.

Wer ist, wenn sich beide treffen, weiter von Oberdorf entfernt?

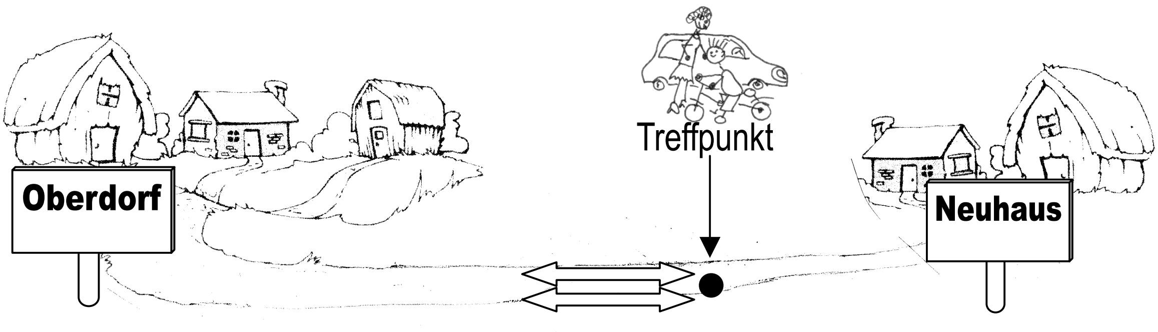


Der Formationsflug der Vögel - Lösung

Es sind drei Vögel, einer hinter dem anderen in einer Reihe.

Oberdorf und Neuhaus – Lösung

Wenn sich beide treffen, sind sie am gleichen Ort und damit gleich weit von Oberdorf entfernt.



gleiche Entfernung für Fahrrad und Auto nach Oberdorf

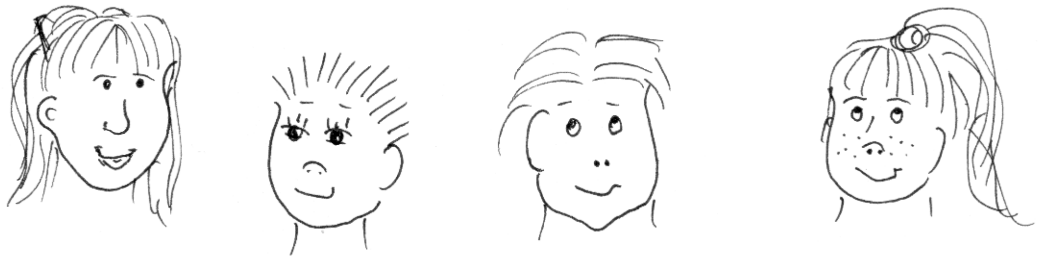
METHODISCHE HINWEISE:
Diese für Erwachsene in der Regel schnell zu findende Lösung ist für Kinder oft Anlass zu vielen Diskussionen. Und selbst nach vielen Griffen in die didaktische Trickkiste, vom Aufmalen der Situation bis zum Nachspielen, gibt es Kinder in diesem Alter, die die Lösung auch dann noch nicht nachvollziehen können.

Der Größe nach

Für ein Foto sollen sich die vier Kinder der Familie Meyer der Größe nach aufstellen. Das größte Kind soll sich nach links stellen, das nächst kleinere rechts daneben usw. Das kleinste Kind steht dann ganz rechts.

Die Kinder stellen sich nebeneinander und finden heraus:
Munir ist kleiner als Maria, Sven ist kleiner als Melissa, Maria ist kleiner als Sven.

In welcher Reihenfolge müssen sich die Kinder aufstellen?



Die Lolli lutschenden Kinder

Anna Braun, Bert Grün und Carl Schwarz sitzen zusammen auf einer Bank.
Jedes Kind lutscht einen Lolli. Das Kind mit dem grünen Lolli stellt plötzlich fest: „Unsere Lollis haben genau die Farben unserer Namen.
„Ja, aber keiner hat den Lolli mit der Farbe seines Namens." bemerkt Anna dazu.
Welches Kind hat welchen Lolli?

aus: Grundschulwettbewerb Landesverband Mathematikwettbewerbe Nordrhein-Westfalen e.V.

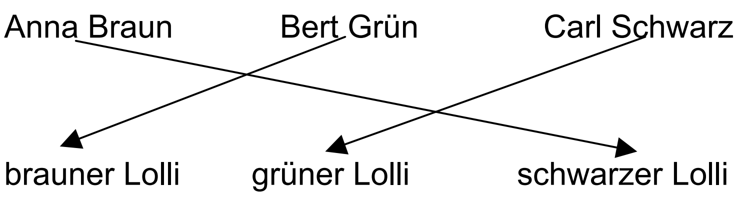
Der Größe nach - Lösung

v. l. n. r.: Melissa, Sven, Maria, Munir

METHODISCHE HINWEISE:
Die Lösung der Aufgabe fällt leichter, wenn die einzelnen Aussagen veranschaulicht werden. Hierzu sind viele Formen möglich. So können die Kinder skizziert und mit Namen versehen sortiert werden oder die Namen selbst werden entsprechend sortiert.

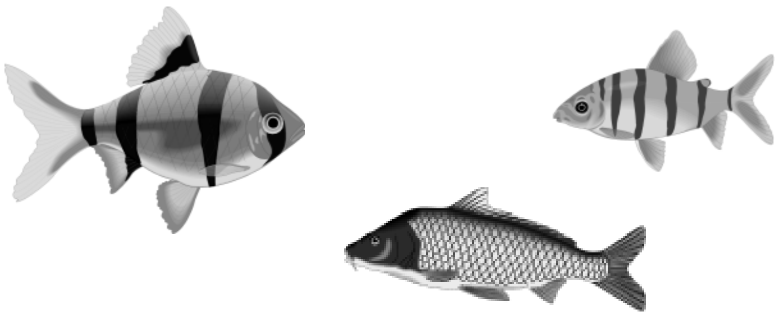
Die Lolli lutschenden Kinder - Lösung

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die drei Lollis auf die drei Kinder so zu verteilen, dass kein Kind den Lolli mit der Farbe seines Namens erhält. Der Text enthält jedoch noch eine Information über Anna Braun: ihr Lolli ist nicht grün, weil sie auf die Bemerkung des Kindes mit dem grünen Lolli antwortet. Damit sind die Farben der Lollis festgelegt.



Der Angelausflug

Zwei Väter und zwei Söhne gehen angeln.
Jeder fängt einen Fisch.
Sie bringen aber nur drei Fische nach Hause.
Wie geht das?



Der Kanister

Ein mit Öl gefüllter Kanister ist 17 kg schwer.
Ist er nur zur Hälfte gefüllt, ist er 9 kg schwer.

Wie schwer ist der leere Kanister?

Der Angelausflug - Lösung

Es handelt sich dabei um:
den Großvater, den Vater und den Sohn

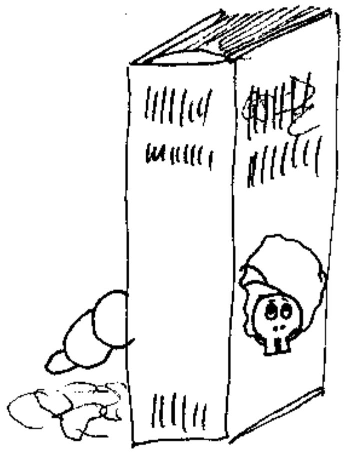
Der Kanister - Lösung

Der leere Kanister wiegt 1 Kilogramm.

Der Bücherwurm

Band 1 und 2 eines Tierlexikons stehen nebeneinander in einem Bücherregal.
Beide Bände haben jeweils eintausend Seiten.
Ein Bücherwurm kommt, möchte sich fortbilden und sich von Seite 1 (Band 1) bis Seite 1000 (Band 2) durchfressen.

Durch wie viele Seiten frisst er sich hindurch?



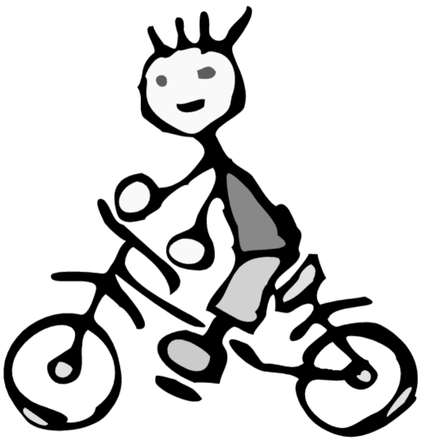
Text nach: www.mathe-spaß.de

Geschwindigkeiten

Wolfgang sagt: „Ich fahre mit meinem Fahrrad in zwei Stunden 24 Kilometer.“

Sein Freund Ivan stellt fest: „Ich schaffe vier Kilometer in 15 Minuten.“

Wer fährt schneller?

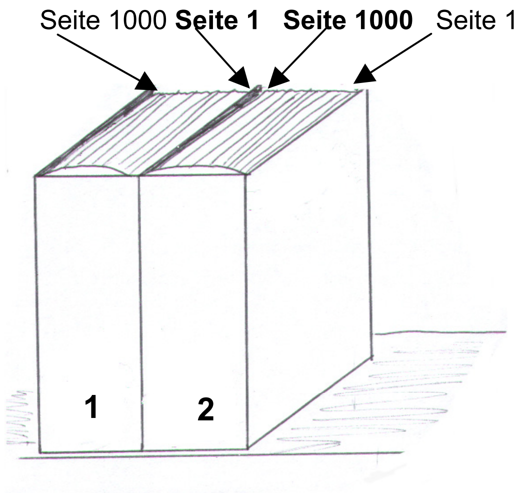


nach: Lehmann, J.: 2 mal 2 und Spaß dabei, Volk und Wissen.

Der Bücherwurm - Lösung

Er durchfrisst zwei Seiten, genau genommen die zwei Buchdeckel.

METHODISCHE HINWEISE:
Um diese Lösung zu finden, muss man eine Reihe von Annahmen voraussetzen.
Es ist anzunehmen, dass die beiden Bände so stehen, dass der erste Band links steht und er zweite rechts daneben, weil dieses der hiesigen Leserichtung entspricht.
Weiter muss angenommen werden, dass nach dem Buchdeckel auch wirklich die Seite 1 gebunden wurde. Leere Zwischenseiten werden nicht gezählt.



Geschwindigkeiten – Lösung

Antwort: Ivan fährt schneller.

METHODISCHE HINWEISE:
Der Vergleich der Geschwindigkeiten ist über eine gemeinsame Zeiteinheit möglich. Zum Beispiel kann man für beide Kinder ausrechnen, wie weit sie in einer Stunde fahren können.

Wolfgang kann in einer Stunde 12 km fahren.
Ivan kann in einer Stunde 16 km fahren.

Die unermüdliche Schnecke

Die unermüdliche Schnecke kriecht eine 90 Zentimeter hohe Wand hoch. Tagsüber kann sie 30 Zentimeter hoch kriechen, in der Nacht rutscht sie wieder 20 Zentimeter hinunter.

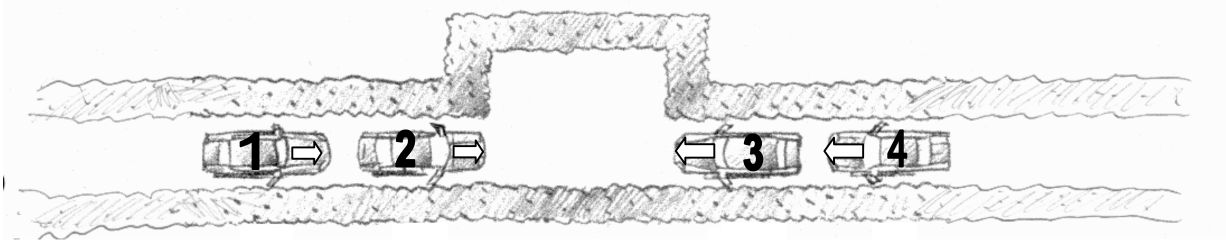
Wie lange benötigt sie, um auf die Mauer zu kommen?

Auf der Landstraße

In England sind die Straßen auf dem Lande nicht nur schmal, sondern auch oft von dichten Hecken begrenzt, so dass zwei Autos nicht aneinander vorbeifahren können. Aus diesem Grund findet man Ausbuchtungen am Straßenrand, in die ein Wagen ausweichen kann, um einen anderen vorbei zu lassen.

An einer solchen Ausbuchtung begegneten sich vier Autos. Zwei Autos fahren hintereinander in der einen Richtung und zwei Autos hintereinander in der Gegenrichtung.

Wie kommen die vier Fahrer mit möglichst wenig Fahrbewegungen aneinander vorbei?

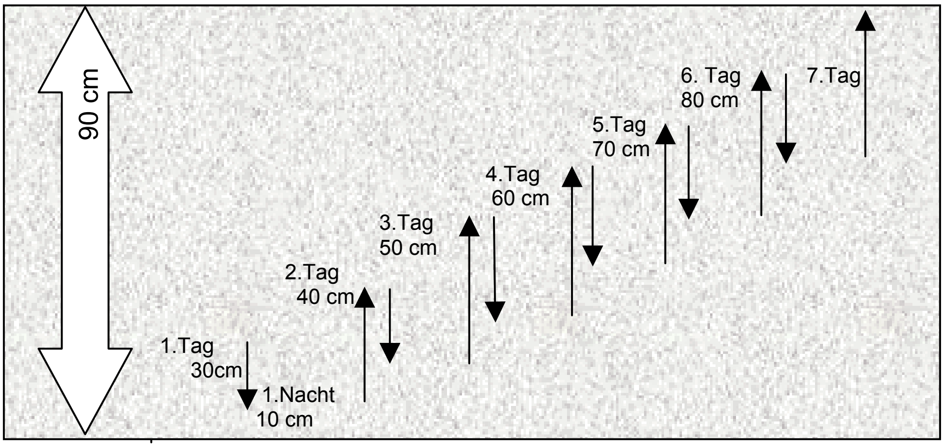


nach: Käpnick, F.: Mathe für kleine Asse, Verlag Volk und Wissen.

Die unermüdliche Schnecke - Lösung

Die Schnecke erreicht am Abend des siebten Tages ihr Ziel.

METHODISCHE HINWEISE:
Diese Aufgaben wird von den Kindern fast immer richtig gelöst, wenn sie als Lösungshilfe eine Skizze anfertigen.



Auf der Landstraße – Lösung

Wagen 3 fährt in die Ausbuchtung und Wagen 4 setzt etwas zurück. Nun fahren die Wagen 1 und 2 nach rechts vor, Wagen 3 kommt aus der Ausbuchtung und setzt seine Fahrt nach links fort. Die Wagen 1 und 2 stoßen wieder an ihre ursprünglichen Plätze zurück. Jetzt kann Wagen 4 in die Bucht ausweichen. Die Wagen 1 und 2 können vorbeifahren und haben freie Fahrt. Auch Wagen 4 kann nun seine Fahrt fortsetzen.

Variante: Entsprechend kann Wagen 2 beginnen.

METHODISCHE HINWEISE:
Es ist sehr hilfreich für die Kinder, wenn sie nummerierte Plättchen zur Hand haben, um die einzelnen Fahrbewegungen auszuführen.

Heuhaufen

Sieben Heuhaufen und elf Heuhaufen werden zusammengetragen.

Wie viele Heuhaufen ergibt das?

Die Monate

Manche Monate haben 30 Tage, andere haben 31 Tage.

Wie viele Monate haben 28 Tage?

Schornsteine

Ein Haus hat zwei Schornsteine, das nächste Haus hat drei Schornsteine und das dritte Haus hat vier Schornsteine.

Was kommt da raus?

Was ist leichter?

Was ist leichter ein Kilogramm Stahl oder ein Kilogramm Federn?

Heuhaufen - Lösung

einen Heuhaufen

Die Monate - Lösung

alle Monate

Schornsteine - Lösung

Rauch

Was ist leichter? - Lösung

beides ist gleich schwer bzw. gleich leicht

5 Literatur

Die nachfolgende Liste ist ein Ergebnis der Arbeit in der Fortbildung zu den Mathezirkeln. Diese Liste gibt einen kurzen Überblick über besprochene Literatur. Aus diesen Büchern können verschiedene Anregungen entnommen werden. Zum einen bieten sie Möglichkeiten, Aufgaben für die Zirkel zu entwickeln, zum anderen Anregungen zur Auseinandersetzung der Erwachsenen oder älterer Kinder mit der Mathematik. Diese Liste erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit.

Autor	Titel	Verlag
Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler	Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften Klasse 3	
Dahl, K., Nordquist, S.	Zahlen, Spiralen und magische Quadrate	Verlag Friedrich Oetinger, Hamburg
Devendran, T.	Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett	Deutsche Verlags-Anstalt Stuttgart
Druschky, P.	120 Spiele und Knobelaufgaben	Kallmeyer 1997
Enzensberger, H. M.	Der Zahlenteufel	Hauser
Fielkner, D.	Extending Mathematical Ability Through Whole Class Teaching	Hodder & Stoughton, London 1997
Flachsel, E.	Die nächsten hundertfünfzig Mathe-Rätsel	Klett
Flachsel, E.	Hundertfünfzig Matherätsel	Klett
Gardner, M.	AHA! oder das wahre Verständnis der Mathematik	Hugendubel Verlag
Grassmann, M.	Durch das Land der Formen und Figuren	Volk und Wissen Verlag, Berlin1999
Hemme, H.	Mathematik zum Frühstück	Vandenhoeck & Ruprecht
Hemme, H, Schwoerer, M.	Mathematischer Denkspaß	Weltbild
Hoffmann, A.	77 scharfe Nachdenkspiele	Companions
Hogben, L.	Wunderbare Zahlenwelt (5 Jahrtausende Mathematik)	C. Bertelsmann
Hund, W.	Zauberhafte Mathematik	Cornelsen
Käpnick, F.	Knobeln und Rechnen mit Zauberbuchstaben	in: Grundschulunterricht, 41 (1994) 5
Käpnick, F.	Mathe für kleine Asse	Volk und Wissen
Keller, K.-H., Pfaff, P.	Von Lernzirkeln, Mathe-Konferenzen und Mathe-Büfetts	Mildenberger Verlag
Kordemski, B. A.	Köpfchen, Köpfchen!	Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin 1983
Lehmann, J.	2 mal 2 plus Spaß dabei	Volk und Wissen Berlin 1989
Meseck, O. R.	Logisch denken leicht gemacht	Bechtermünz

Autor	Titel	Verlag
Müller, G., Wittmann, E.	Denkschule 1+2	Klett
Neidinger, G.	Tolle Rechenpuzzles	Favorit-Verlag
Papenberg, M.	Kommissar Focks ermittelt	Kbv Luzern, 2000
Paulitsch, A.	Wie die Zahlen Mathematik machen	Aulis
Philipps, H.	Mathematische Puzzles	Hugendubel
Radatz, H., Rickmeyer, K.	Aufgaben zur Differenzierung	Schroedel Verlag
Rinkens, Prof. Dr. H.-D., Hönisch, K. (Hrsg)	Knobeln und Entdecken	Schroedel
Russell, K., Carter, P.	Das Superbuch der IQ-Puzzles	Gondrom (?)
Schmidt, H. J.	Historische Verfahren – zeitgemäß aufbereitet	Aulis Verlag Deubner
Shell Centre for Mathematical Education	Problems with Patterns and Numbers	Masters for Photocopying
Stucki, B.	Logicals Lesen – verstehen – kombinieren	SCHUBI, Schaffhausen, 2001
Snape, C., Scott, H.	Mathematische Wundertüte	Klett
Snape, C., Scott, H.	Mathematischer Zauberkasten	Klett
Stewart, I.	Die Reise nach Pentagonien	Spektrum Akademischer Verlag
Volkert, K.	Rechenspiele zum spielerischen Knobeln und Grübeln	Duden 1988
Vorderman, C.	Spannendes aus der Welt der Mathematik	Kaleidoskop
Werneck, T., Kohnen, D., Gansweid, J., Zey, R.	Das große Buch vom Spielen, Knobeln und Raten	Falken
Woolley, D.	5 Minuten Logik-Knacker	Verlag an der Ruhr